This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

3 3433 06909139 9

Lacroix
OFF

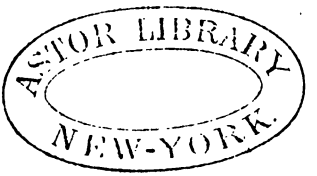
Silv. Franc. Lacroix's

Anfangsgründe

der

Arithmetik.

Nach der siebzehnten Originalausgabe aus dem Französischen übersetzt, und mit einigen Anmerkungen versehen.



Berlin,
im Verlage von Duncker und Humblot.

1827.

Vorbericht des Uebersetzers.

Die im Jahr 1805 erschienene deutsche Uebersetzung von Lacroix's Traité élémentaire d'Arithmétique ist nunmehr gänzlich vergriffen, und da seit jener Zeit viele neue, zum Theil veränderte, Auflagen des Originals erschienen sind, so erkannte die Verlagshandlung das Bedürfniß einer ganz neuen Uebersetzung. Die gegenwärtige ist nach der siebzehnten Ausgabe des Originals (Paris 1826) veranstaltet, und der Uebersetzer hat sich bemüht, diesem Originale möglichst treu zu bleiben. Von den Veränderungen, die ihm unumgänglich nöthig geschienen haben, folgt hier eine kurzgefaßte Rechenschaft.

Das Original enthält nur die Darstellung des neu-französischen Maaß-Systems; in der Uebersetzung hat man eine ähnliche Darstellung des preußischen Maaß-Systems eingeschaltet.

Nach der Darstellung des neu-französischen Maaß-Systems folgen im Originale, in sechs Paragraphen, einige Aufgaben in benannten Zahlen mit zehntheiligen Unterabtheilungen, die keine neue Rechnungs-Regeln erfordern, weil

eben die Decimaleintheilung den Vortheil gewährt, diese mehrnamigen Zahlen ohne Weiteres wie einnamige behandeln zu können. Der Verfasser geht darauf zu den Proportionen, der Regel de Tri, der Gesellschaftsrechnung u. s. w. fort, und läßt erst dann die Rechnung mit complexen oder mehrnamigen Zahlen folgen. Diese Anordnung mag für den Rechnen-Unterricht in Frankreich ganz geeignet seyn; der Uebersetzer hat aber geglaubt, der, in den deutschen Rechenbüchern nicht ohne Grund eingeführten, Ordnung folgen zu müssen, und die Rechnung mit mehrnamigen oder benannten Zahlen vor der Lehre von den Proportionen vortragen, die erwähnten sechs Paragraphen aber in den Abschnitt, der von dieser Rechnung handelt, einschieben zu dürfen. Jene sechs Paragraphen bilden in der Uebersetzung die §§. 103, 104, 108, 117 und 118.

Einiges, was sich, in den beiden Abschnitten von der Rechnung mit mehrnamigen Zahlen und von der Verwandlung verschiedener Maaße, nur auf Frankreich bezieht, ist weggelassen worden, wie z. B. der letzte Paragraph des erstern Abschnitts, welcher wie folgt lautet: „Die Ver„gleichung der nach einander dargestellten Verfahrungsarten „ist sicherlich die beste Probe, welche man von dem Vor„theil geben kann, den die neuen Maaße (die französischen „Decimal-Maaße nämlich) gewähren werden, wenn man sie „angenommen haben wird; und welche Gewandtheit man „auch in der Rechnung mit mehrnamigen Zahlen haben „mag, so würde man doch nicht umhin können, die große „Bequemlichkeit der Decimal-Rechnung wahrzunehmen,

„wenn man nicht fortfahren möchte, ſich der alten Maaße „zu bedienen, was für jedes Reſultat die Verwandlung die„ſer Maaße in die neuen Maaße erheiſcht, eine Operation, „welche immer lang und dem neuen Maaß-Syſteme durch„aus fremd iſt, und die man deſſen ungeachtet hartnäckig „ſo betrachtet, als wäre ſie mit dem Gebrauche dieſes „Syſtems unzertrennlich verknüpft." — Man hat dieſen Paragraphen hier aufgenommen, weil es durch ihn beſtätigt wird, daß die neuen Maaße, deren Einführung die franzöſiſche Regierung ſchon vor dreißig Jahren angeordnet, noch immer ſo wenig im Gebrauch ſind, daß dieſe Einführung bis jetzt mehr Unbequemlichkeit als Bequemlichkeit zu Wege gebracht hat.

Statt der im Original befindlichen Tafeln zur Verwandlung aller alt-franzöſiſchen Maaße in neu-franzöſiſche und umgekehrt, ſind der Ueberſetzung Tafeln zur Verwandlung der preußiſchen, neu-franzöſiſchen und einiger alt-franzöſiſchen Maaße angehängt worden; und ſtatt der dem Original beigefügten Vergleichungs-Tafel verſchiedener fremder Münzen mit der franzöſiſchen, hat der Ueberſetzer eine Vergleichungs-Tafel mehrerer fremder Münzen mit den preußiſchen hinzugefügt, zu welcher die Angaben des Gewichtes und Gehaltes größtentheils aus „Nelkenbrechers Taſchenbuch" und „Gerhardt's Tafeln zur genauern Kenntniß aller wirklich geprägten Gold- und Silber-Münzen älterer und neuerer Zeit" genommen, die Werthe der Münzen aber von neuem berechnet worden ſind.

Im März 1827.

Inhalt.

Von den verschiedenen Arten der Größe . . . . . Seite 1
Vom Numeriren 2
Vom Numeriren durch Worte . . . . . —
Von der Art eine Zahl durch Ziffern darzustellen oder von dem schriftlichen Numeriren 4
Von der Art eine mit Ziffern geschriebene Zahl auszusprechen . 6
Was eine abstracte und was eine concrete Zahl ist . . . 7
Von der Addition 8
Gründe, auf welchen die Addition beruht . . . . . —
Allgemeine Regel für die Addition 10
Von der Subtraction 11
Gründe, auf welchen die Subtraction beruht . . . . . —
Von der Bedeutung der Wörter Rest, Ueberschuß, Differenz (Subtrahendus und Minuendus) 12
Allgemeine Regel für die Subtraction 15
Von der Probe der Addition und Subtraction . . . 16
Von der Multiplication 18
Ursprung der Multiplication . . . . . —
Bedeutung der Wörter Multiplicandus, Multiplicator, Product und Factor . . . . . —
Gründe auf welchen die Multiplication beruht 19
Die Pythagorische Tafel oder das Ein-mal-Eins . . . . . —
Bildung dieser Tafel . . . . . —
Bemerkung, aus welcher der Satz abgeleitet wird, daß ein Product sich nicht ändert, wenn man Multiplicator und Multiplicandus verwechselt 20
Regel um eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu multipliciren 23
Wie man eine Zahl mit 10, 100 u. s. f. multiplicirt 24
Regel um mit einer Zahl, welche mit einer geltenden Ziffer und angehängten Nullen geschrieben ist, zu multipliciren . 25

Allgemeine Regel für die Multiplication . . . . . Seite 26
Wie sich die Multiplication abkürzen läßt, wenn Multiplicandus und Multiplicator mit Nullen endigen 27
Von der Division . . . . . —
Ursprung der Division . . . . . —
Gründe, auf welchen die Division beruht 28
Bedeutung der Wörter Dividendus, Divisor und Quotient —
Wie man zu verfahren hat, wenn der Divisor eine mehrzifferige Zahl ist 32
Allgemeine Regel für die Division 35
Wie die Rechnung abgekürzt werden kann 36
Wie man verfährt wenn der Dividendus und der Divisor mit Nullen endigen 37
Die Division und die Multiplication dienen einander gegenseitig zur Probe . . . . . —
Von den Brüchen 38
Ursprung der Brüche . . . . . —
Von der Art und Weise die Brüche zu benennen und zu schreiben 40
Was Zähler und Nenner sind . . . . . —
Von der Aenderung, die ein Bruch erleidet, wenn man seinen Zähler oder seinen Nenner vermehrt oder verringert 41
Zusammenstellung der Sätze von der Veränderung eines Bruches durch Multiplication oder Division seines Zählers oder Nenners 43
Der Werth eines Bruches wird nicht verändert wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt . . . . . 43 — 44
Wie ein Bruch vereinfacht oder gehoben wird . . . . 44 — 45
Was der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen ist 46
Allgemeine Regel für die Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Theilers zweier Zahlen 48
Woran man erkennt, ob eine Zahl durch 2 oder durch 5 oder durch 9 oder 3 theilbar ist 50
Was Primzahlen sind 52
Von der Addition und Subtraction der Brüche . . . . . —
Wie ein unächter Bruch in eine gemischte Zahl verwandelt wird 53
Wie eine gemischte Zahl eingerichtet wird . . . . . —
Regel, um mehrere Brüche auf einerlei Benennung zu bringen 55
Ein aus mehreren Factoren gebildetes Product ändert sich nicht, in welcher Ordnung man auch diese Factoren mit einander multipliciren mag 56
Von der Addition und Subtraction gemischter Zahlen . . . 59

Was das Wort multipliciren im allgemeinern Sinne bedeutet . . . . . Seite 61
Von der Multiplication einer ganzen Zahl mit einem Bruche 62
— — — eines Bruches mit einem Bruche . . 63
Was ein Bruchs-Bruch ist 63
Was Division im allgemeinern Sinne ist 64
Von der Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch . . 65
— — eines Bruches durch einen Bruch 65
Von den Decimalbrüchen 66
Ursprung der Decimalbrüche . . . . . —
Von der Art und Weise, Decimalbrüche zu schreiben . . . 68
Eine Zahl, welche Decimalziffern enthält, wird nicht geändert, wenn man ihr eine oder mehrere Nullen anhängt . 69
Addition der Decimalbrüche 70
Subtraction der Decimalbrüche 71
Veränderungen, welche die Versetzung des Kommas hervorbringt 72
Multiplication einer Zahl, welche Decimalziffern enthält, mit einer ganzen Zahl . . . . . 73—74
desgleichen mit einer andern Zahl, welche ebenfalls Decimalziffern enthält 74
Division einer Zahl, welche Decimalziffern enthält, durch eine ganze Zahl 75
desgleichen durch eine andere Zahl, welche ebenfalls Decimalziffern enthält 76
Von der Art und Weise, sich dem Quotienten einer Division vermittelst der Decimalbrüche zu nähern 76
Anmerkung die Art und Weise enthaltend wie man den Quotienten einer Division in Brüchen von gegebener Benennung bestimmen kann 77
Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch 78
Von den periodischen Decimalbrüchen 80
Vom preußischen Maaß-Systeme 83
Vom neu-französischen Maaß-Systeme 87
Von der Rechnung mit benannten Zahlen 89
Von der Addition benannter Zahlen 90
Von der Subtraction benannter Zahlen 92
Von der Multiplication benannter Zahlen 94
Durch Verwandlung der mehrnamigen Zahlen in einnamige gebrochene Zahlen 96
Multiplication einer mehrnamigen Zahl mit einer einnamigen 97
Was aliquote Theile sind 98

Verfahrungsart für den Fall, wenn bloß der Multiplicator eine Seite mehrnamige Zahl ist 100
Verfahrungsart für den Fall, wenn beide, Multiplicandus und Multiplicator mehrnamige Zahlen sind 101
Allgemeine Regel 104

Von der Division benannter Zahlen . . . . . —
Wenn der Dividendus und der Divisor von einerlei Art sind 106
Wenn sie von verschiedener Art sind, aber nur der Dividendus mehrnamig ist 108
Wenn beide mehrnamig sind 109

Von den Proportionen 110
Einige Aufgaben, welche auf Proportionen führen 111
Was ein Verhältniß und was eine Proportion ist . . . 113
Ein Verhältniß wird nicht geändert, wenn man seine beiden Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt . . . . . —
Wie eine Proportion geschrieben wird 114
Wie man erkennen kann, ob vier gegebene Zahlen in Proportion stehen 115
Versetzungen, die man mit den Gliedern einer Proportion vornehmen kann, ohne die Proportion zu stören . . . 116
Wie man jedes Glied einer Proportion finden kann, wenn die übrigen drei Glieder bekannt sind 117
Was die Regel de Tri ist 118
Worauf man beim Ansetzen einer Proportion zu achten habe . —
Was ein umgekehrtes Verhältniß ist 120
Zins-Rechnung 121
Disconto-Rechnung 122

Zusammengesetzte Regel de Tri . . . . . —
Was ein zusammengesetztes Verhältniß ist 127
Was Säulenaufsatz und Kettenaufsatz heißt . . . . . —

Von der Gesellschafts-Rechnung 128
Verschiedene andere Aufgaben 131
Von der Aequidifferenz 132
Anmerkung über die Benennungen geometrische und arithmetische Proportion 133

Alligations-Rechnung 134
Von der umgekehrten Alligations-Rechnung 135

Von der Vergleichung der verschiedenen Maaße . . 138

Von einigen Abkürzungsmitteln arithmetischer Rechnungen 142

Verfahren um die Multiplication und Division großer Zahlen Seite
sich zu erleichtern 142
Verfahren um die Multiplication von Zahlen, welche Decimal-
ziffern enthalten, zu verkürzen 145
Zerfällung einer Zahl in ihre Factoren 147
Grundbegriff der zusammenhängenden oder Ketten-Brüche 149
Von der Anwendung der Arithmetik auf kaufmänniſche
und Banquier-Geſchäfte 152
Tafeln zur Verwandlung der preußiſchen, neu-franzö-
ſiſchen und alt-franzöſiſchen Maaße 155
Vergleichungs-Tafel verſchiedener fremder Gold- und
Silber-Münzen 159

Erklärung der römischen Ziffern.

Eins	I	j
Zwei	II	ij
Drei	III	iij
Vier	IV	iv
Fünf	V	v
Sechs	VI	vj
Sieben	VII	vij
Acht	VIII	viij
Neun	IX	ix
Zehn	X	x
Zwanzig	XX	xx
Dreißig	XXX	xxx
Vierzig	XL	xl
Funfzig	L	l
Sechzig	LX	lx
Siebzig	LXX	lxx
Achtzig	LXXX	lxxx
Neunzig	XC	xc
Hundert	C	c
Zweihundert	CC	cc
Dreihundert	CCC	ccc
Vierhundert	CCCC	cccc
Fünfhundert	D oder IↃ	d
Sechshundert	DC	dc
Siebenhundert	DCC	dcc
Achthundert	DCCC	dccc
Neunhundert	DCCCC	dcccc
Tausend	M oder CIↃ	m
Tausend ein hundert	MC	mc
Tausend zwei hundert	MCC	mcc
Tausend drei hundert	MCCC	mccc
Tausend vier hundert	MCCCC	mcccc
Tausend fünf hundert	MD	md

Berichtigungen.

Seite	43	Zeile 4	lies $\frac{3}{15}$, statt $\frac{1}{5}$,
—	54	letzte Zeile —	jeden andern Brüchen st. jedem andern Bruche
—	61	— 14	l. des Multiplicandus seyn soll st. der Einheit seyn soll
—	111	— 7 v. u.	l. 3 Stunden 4 Meilen st. 4 Stunden 3 Meilen
—	115	— 9	l. $\frac{15}{13}$ st. $\frac{31}{81}$.
—	141	— 8 v. u.	l. mit 152 st. mit 1 2
—	142	— 3 v. u.	l. 152 st. 125

Anfangsgründe der Arithmetik.

§ 1.

Wenn man die verſchiedenen Gegenſtände betrachtet, die wir durch die Sinne wahrnehmen, ſo bemerkt man bald, daß alle dieſe Dinge der Vermehrung und Verminderung fähig ſind. Dieſe Beſchaffenheit aller ſinnlichen Dinge nennt man **Größe**. Sie zeigt ſich im allgemeinen unter zweierlei Formen.

Erſtens nämlich, als eine Menge gleichartiger Dinge oder geſonderter Theile eines Dinges, in welchem Falle ſie **Zahlengröße** oder **Zahl** genannt wird.

Zweitens, als ein zuſammenhängendes Ganze. Eine ſolche Größe iſt z. B. die Entfernung zweier Punkte oder die Länge der graden Linie, welche dieſe beiden Punkte verbindet, ferner die Fläche, welche einen Körper begrenzt, und endlich der von einem Körper eingenommene Raum ſelbſt.

Die Eigenthümlichkeit dieſer letztern Form der Größe beſteht darin, daß man in ihr den ununterbrochenen Zuſammenhang ihrer Theile oder ihre **Stetigkeit** (Continuität) ins Auge faßt, während man bei der Zahlengröße nur daran denkt, wie viel Theile die Größe hat. Daher nennt man auch Größen von der zweiten Form **ſtetige** oder **continuirliche**, die von der erſten aber **discontinuirliche** oder **discrete** Größen.

§ 2.

Alles, was die Größe betrifft, ist ein Gegenstand der Mathematik, von welcher derjenige Theil, dessen Gegenstand insbesondere die Zahlengrößen sind, Arithmetik heißt.

Die Geometrie beschäftigt sich mit continuirlichen Größen, insbesondere mit den Eigenschaften der Figuren und Körper, welches im Raume darstellbare Größen sind.

Vom Numeriren.

§ 3.

Da die Zahl eine Menge gleichartiger Dinge oder gesonderter Theile eines Dinges ist, so setzt der Begriff derselben die Existenz eines dieser Dinge voraus, welches als Vergleichungsmittel angenommen und alsdann Einheit genannt wird.

Die einfachste Art die Zahlen zu bilden besteht darin, daß man eine Einheit zu einer andern hinzufügt; zu dem hieraus Entstandenen noch eine andere; und so fortfahrend jede Menge von Einheiten zusammensetzt, die man alsdann mit besondern Namen bezeichnet. Die Gesammtheit dieser Benennungen, welche in den verschiedenen Sprachen verschieden sind, bildet das Numeriren durch Worte.

§ 4.

Da zu jeder Zahl, wie groß sie auch seyn mag, noch eine Einheit hinzugefügt werden kann, so wird die Menge der Zahlen durch nichts begrenzt, woraus zugleich folgt, daß es eine unendliche Menge verschiedener Zahlen giebt, und daß es also unmöglich ist, sie mit besondern, von einander unabhängigen, Namen zu bezeichnen.

Hieraus ist diejenige Art die Zahlen zu benennen entstanden, vermöge welcher man durch regelmäßige Zusammensetzungen einer geringen Anzahl von Wörtern, eine beliebige Anzahl verschiedener Ausdrücke bilden kann.

Im Deutſchen werden alle Zahlen-Namen, einige ausgenommen, aus den Namen der neun erſten Zahlen, und aus denjenigen zuſammen geſetzt, welche den aus zehn, hundert und tauſend Einheiten beſtehenden Zahlen beigelegt ſind.

Die Namen der erſten neun Zahlen, welche Einer genannt werden, ſind: eins, zwei, drei, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht und neun.

Die zunächſt folgende Zahl heißt zehn oder ein Zehner, und zwei, drei, vier ... neun Zehner werden mit den Namen zwanzig, dreißig, vierzig ... neunzig belegt.

Zehn Zehner heißen hundert oder ein Hundert, und man benennt zwei, drei, vier, ... neun Hunderte mit zwei hundert, drei hundert, vier hundert, ... neun hundert.

Zehn Hunderte heißen tauſend oder ein Tauſend, und jede Anzahl von Tauſenden wird mit dem Namen der Einer, der Zehner oder der Hunderte dieſer Anzahl benannt. So ſagt man:

tauſend, zwei tauſend, ... neun tauſend;
zehn tauſend, zwanzig tauſend, .. neunzig tauſend;
hundert tauſend, zwei hundert tauſend, .. neun hundert tauſend.

Tauſend Tauſende heißen eine Million; eine Million Millionen heißt eine Billion; eine Million Billionen heißt eine Trillion u. ſ. f.

Ein Zehner wird als eine Einheit der zweiten Ordnung, ein Hundert als eine Einheit der dritten Ordnung, ein Tauſend als eine Einheit der vierten Ordnung, ein Zehntauſend als eine Einheit der fünften Ordnung u. ſ. f. betrachtet. Man ſieht nun ein, daß die Namen der Zehner, Hunderte und Tauſende ſich immer wiederholen, und daß von neuem nur die Namen Million, Billion, Trillion, u. ſ. f. von ſechs zu ſechs Ordnungen eingeführt werden.

Zahlen, welche auf dieſe Weiſe ausgedrückt werden, und

in deren Benennungen mehr als ein Wort vorkommt, ſind alſo in mehrere Einheiten von verſchiedenen Ordnungen zerlegt. So z. B. iſt die Zahl, welche fünf hundert tauſend drei hundert und zwei genannt wird, in drei Theile zerlegt, nämlich in fünf Hunderttauſende, in drei Hunderte und in zwei Einer, oder was daſſelbe iſt, in fünf Einheiten der ſechsten, drei Einheiten der dritten und zwei Einheiten der erſten Ordnung.

§ 5.

Die Länge der mit Buchſtaben geſchriebenen Namen etwas großer Zahlen hat darauf geführt Schriftzeichen feſtzuſetzen, welche auf kürzere Weiſe und ausſchließlich Zahlen vorſtellig machen. Hieraus iſt die Art und Weiſe entſtanden, Zahlen mit dieſen Zeichen, welche Ziffern heißen, zu ſchreiben oder das ſchriftliche Numeriren.

Von den erſten neun Zahlen wird eine jede durch ein beſonderes Zahlzeichen ausgedrückt, nämlich:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Eins, zwei, drei, vier, fünf, ſechs, ſieben, acht, neun.

Wenn eine Zahl aus Zehnern und Einern, oder, was daſſelbe iſt, aus Einheiten der zweiten und Einheiten der erſten Ordnung zuſammen geſetzt iſt, ſo ſchreibt man die Ziffern, welche die Anzahlen dieſer Zehner und Einer bedeuten, neben einander von der linken nach der rechten Seite hin. Die Zahl ſieben und vierzig z. B. wird 47 geſchrieben; die Ziffer zur Linken, 4, bedeutet die vier Zehner, und hat folglich einen Werth, der zehn mal ſo groß iſt als derjenige, den ſie haben würde, wenn ſie einzeln da ſtände, während die Ziffer 7, welche auf der rechten Seite ſteht, die ſieben Einer bedeutet, und nur den Werth hat, der ihr einzeln ſtehend beigelegt worden iſt.

In der Zahl drei und dreißig, welche 33 geſchrieben wird, iſt die Ziffer 3 wiederholt angeſetzt; ſie hat aber verſchie-

dene Werthe; die Ziffer 3 auf der linken Seite hat einen zehn mal so großen Werth als die auf ihrer rechten. Und dies ist das Grundgesetz unsers schriftlichen Numerirens.

Um funfzig oder fünf Zehner durch Ziffern auszudrükken, würde man nur die Ziffer 5 hinzuschreiben haben, da weiter keine Einer in dieser Zahl vorhanden sind, und man muß daher durch ein eigenes Zeichen bemerklich machen, daß, in der Bezeichnung der Zahl funfzig, die Ziffer 5 die erste Stelle zur linken einnehmen soll. Zu dem Ende setzt man auf der rechten Seite dieser Ziffer das Zeichen 0, oder die Null, welche an und für sich keinen Werth hat, und nur dazu dient die Stelle der Einer auszufüllen, welche in der vorgelegten Zahl nicht weiter vorhanden sind. Demnach bezeichnet man funfzig durch 50.

§ 6.

Durch zehn Zeichen allein und mit Hülfe der oben festgesetzten Bestimmung über den Werth der Ziffern, welchen sie durch die Stelle, die sie einnehmen, erhalten, ist man im Stande jede beliebige Zahl zu bezeichnen.

Mit zwei Ziffern kann man bis zu neun Zehnern und neun Einern, d. i. bis zu neun und neunzig oder 99, schreiben. Nach dieser Zahl folgt hundert, welches durch die Ziffer 1 in der Stelle bezeichnet wird, welche derjenigen zur linken liegt, in der diese Ziffer einen Zehner bedeutet. Zu dem Ende setzt man zwei Nullen auf die rechte Seite der 1, welches 100 giebt.

Die Zehner und Einer, welche man zu hundert hinzufügt, um größere Zahlen zu bilden, nehmen die ihnen zugehörigen Stellen ein. So schreibt man hundert und eins in Ziffern mit 101, hundert und eilf mit 111. In der letzten Zahl ist eine und dieselbe Ziffer dreimal angesetzt; sie hat aber in den verschiedenen Stellen verschiedene Werthe. In der ersten Stelle, von der rechten Seite angerechnet, bezeichnet sie einen Einer, in der zweiten einen Zehner und in der

dritten ein Hundert. Daſſelbe findet bei den Zahlen 222, 333, 444, u. ſ. w. Statt. Auf dieſe Weiſe drückt eine und dieſelbe Ziffer zehn und zehn mal größere Einheiten aus, je weiter und weiter ſie von der rechten nach der linken Seite hin fortgerückt iſt, ſo daß man im Stande iſt, durch bloße Veränderung der Stelle der Ziffern, die Einheiten aller Ordnungen auszudrücken, welche in einer gegebenen Zahl vorkommen können.

§ 7.

Man ſchreibt nun alſo eine ausgeſprochene Zahl dadurch, daß man die Ziffern, welche die Anzahlen der Einheiten der verſchiedenen Ordnungen bezeichnen, neben einander ſetzt, indem man mit der höchſten Ordnung und von der linken Seite anfängt. Hierbei muß man die Aufeinanderfolge der verſchiedenen Ordnungen der Einheiten wohl gefaßt haben, damit man keine auslaſſe und die Stellen derjenigen, welche in der gegebenen Zahl nicht genannt ſind, mit Nullen ausfülle. Wenn z. B. dreihundert vier und zwanzig tauſend neun hundert und vier mit Ziffern geſchrieben werden ſoll, ſo ſetzt man 3 für die Hunderttauſende, 2 für die Zehntauſende, 4 für die Tauſende, 9 für die Hunderte, und, da nach den Hunderten die Zehner folgen, welche in der gegebenen Zahl nicht vorkommen, 0 um ihre Stelle anzudeuten, und endlich 4 für die Einer, ſo daß man hat: 324904. Eben ſo wird man die Zahl fünf hundert tauſend drei hundert und zwei, wenn man darauf achtet die Stellen der Zehntauſende, Tauſende und Zehner, welche in dieſer Zahl nicht vorkommen, mit Nullen auszufüllen, 500302 ſchreiben.

§ 8.

Um eine mit Ziffern geſchriebene Zahl auszuſprechen, muß man für jede Ziffer den Namen der Zahl ſetzen, welche ſie bezeichnet, und dieſem Namen die Benennung der Ordnung der Einheit anhängen, die ſie, nach der Stelle, welch:

ſie einnimmt, zu bedeuten hat. Folgendes Beiſpiel wird das Geſagte erläutern.

2	4	8	9	7	3	2	1	5	8	0	3	4	6
Billionen.		Billionen.			Millionen.			Tauſende.			Einer.		
Zehner der Billionen.	Billionen.	Hunderttauſende der Billionen.	Zehntauſende der Billionen.	Tauſende der Billionen.	Hunderte der Millionen.	Zehner der Millionen.	Millionen.	Hunderttauſende.	Zehntauſende.	Tauſende.	Hunderte.	Zehner.	Einer.

Die Ziffern dieſer Zahl ſind, von der rechten Seite an, in Gruppen oder Claſſen von ſechs Ziffern abgetheilt (die letzte Claſſe, welche in dem gegenwärtigen Beiſpiele zwei Ziffern enthält, kann in einer andern Zahl nur eine Ziffer, oder auch mehr als zwei Ziffern, niemals aber mehr als ſechs Ziffern enthalten). Die erſte Claſſe enthält die Einer, die zweite die Millionen, die dritte die Billionen, und die Ziffern einer jeden Claſſe bedeuten die Einer, Zehner, Hunderte, Tauſende, Zehntauſende und Hunderttauſende eben dieſer Klaſſe. Man ſpricht demnach eine mit Ziffern geſchriebene Zahl aus, wenn man jede Claſſe ſo lieſt, als ob ſie allein da ſtände, und den Namen der Einheiten, die ſie enthält, dazu nennt. Das obige Beiſpiel lieſt man alſo: Vier und zwanzig Billionen, acht hundert ſieben und neunzig tauſend drei hundert ein und zwanzig Millionen, fünf hundert achtzig tauſend drei hundert ſechs und vierzig.

§ 9.

Die Zahlen können auf zweifache Weiſe in Betrachtung genommen werden, nämlich: ſo wie wir es eben gethan, indem wir die Art ihrer Einheiten gar nicht angegeben haben, in welchem Falle man ſie unbenannte oder abſtracte Zahlen nennt; oder indem man die Art ihrer Einheiten be-

stimmt, wenn man z. B. sagt, zwei Menschen, fünf Jahre, drei Stunden u. s. w., in welchem Falle man sie benannte oder concrete Zahlen nennt. Es ist einleuchtend, daß die Bildung der Zahlen durch die stufenweise Zusammenfügung der Einheiten (§ 3) keinesweges von der Art dieser Einheiten abhängt, und daß dasselbe von all denjenigen Eigenschaften der Zahlen gilt, welche aus dieser Bildung folgen, und auf deren Grund man denn auch mehrere Zahlen zusammen setzen und zerlegen kann, oder, mit einem Worte, mit Zahlen rechnen kann. Wir wollen daher die Haupt-Regeln der Zahlenrechnung auseinander setzen, ohne dabei auf die Art der Einheiten, aus welchen die Zahlen bestehen, Rücksicht zu nehmen.

Von der Addition.

§ 10.

Die Operation, welche den Zweck hat mehrere Zahlen in eine einzige zu vereinigen, ist nur eine Verkürzung der Bildung der Zahlen durch stufenweise Zusammenfügung der Einheiten. Wenn man z. B. zu sieben, fünf hinzufügen wollte, müßte man in der Reihe der Namen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, u. s. f. um fünf Stufen über das Wort sieben hinaus gehen; man würde alsdann zu dem Namen zwölf kommen, welcher folglich der Vereinigung von sieben und fünf Einheiten zugehört. Auf diesem Verfahren beruhen alle die Additionen kleiner Zahlen, deren Resultate jederman im Gedächtnisse hat. Da die Anwendung desselben auf größere Zahlen beschwerlich seyn würde, so zerlegt man sie in die Einheiten der verschiedenen Ordnungen, aus welchen sie bestehn, um die Zusammenfügung der Einheiten gleicher Ordnungen einzeln vorzunehmen. Um z. B. zu 27, 32 hinzuzufügen, oder was dasselbe ist, um 27 und 32 zusammen zu zählen, zählt man die 7 Einer der ersten

Zahl zu den 2 Einern der zweiten, was 9 giebt, sodann die 2 Zehner der ersten zu den 3 Zehnern der zweiten Zahl, wodurch man fünf Zehner erhält. Man hat also in allem 5 Zehner und 9 Einer, oder 59, welches die Summe der gegebenen Zahlen ist.

Was eben gesagt worden, läßt sich immer in Anwendung bringen, wie groß auch die zusammen zu zählenden Zahlen seyn mögen. Es ist hierbei nur zu beachten, daß Partial-Summen, welche durch die Addition mehrerer einzifferigen Zahlen heraus kommen, öfters Zehner oder Einheiten einer höhern Ordnung hervorbringen können, welche sodann zu den Einheiten dieser Ordnung hinzugezählt werden müssen.

Bei der Addition der Zahlen 49 und 78 giebt die Summe der Einer 9 und 8, die Zahl 17, von welcher man die Zahl 10 oder einen Zehner zurück behalten muß um ihn zu der Summe der Zehner hinzuzufügen. Man wird also sagen, 4 und 7 machen 11, und indem man hierzu den zurückbehaltenen Zehner hinzufügt, erhält man 12 für die Anzahl der Zehner, welche in der Summe der gegebenen Zahlen enthalten sind. Diese Summe besteht also aus 1 Hunderte, 2 Zehnern und 7 Einern, und ist daher 127.

§ 11.

Wenn man hiervon ausgeht wird man finden, daß die schriftliche Anordnung der zusammen zu zählenden Zahlen, und die darauf beruhenden Regeln, welche das folgende Beispiel hinlänglich kennen lehren wird, die Operation des Zusammenzählens sehr erleichtern.

Es seyen 527, 2519, 9812, 73 und 8 die zu addirenden Zahlen (Summanden). Man fängt damit an, sie so unter einander zu schreiben, daß die Einheiten einer und derselben Ordnung in einer und derselben Columne zu stehen kommen. Sodann macht man unter der letzten Zahl einen Strich, um die gegebenen Zahlen von dem Resultate abzusondern, welches unter den Strich gesetzt wird.

527
2519
9812
73
8

Summe . . 12939

Man zählt hierauf die Zahlen zusammen, welche sich in der Columne der Einer befinden, und da man für diese Summe 29 findet, schreibt man nur die neun Einer hin und behält die 2 Zehner zurück, um sie zu den Zehnern, welche in der zweiten Columne stehen, zuzuzählen, welche mit dieser zusammen 13 Einer der zweiten Ordnung betragen. Hiervon schreibt man nur die 3 Einer hin, und behält den Zehner zurück, um ihn zur folgenden Columne hinzuzufügen. Man verfährt nun mit dieser Columne wie mit den vorhergehenden und findet dann 19, wovon man nur die 9 Einer hinschreibt, und den Zehner für die folgende Columne zurückbehält, deren Summe alsdann 12 ausmacht. Sodann schreibt man die 2 Einer unter diese Columne und den Zehner links daneben. Auf diese Weise ist die Summe der gegebenen Zahlen, nämlich 12939, gefunden.

§ 12.

Das Verfahren, welches wir eben befolgt haben, kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Man schreibe die zu addirenden Zahlen dergestalt unter einander, daß die Einheiten einer und derselben Ordnung in einer und derselben Columne zu stehen kommen; ziehe unter der lezten Zahl einen Strich um sie von dem Resultate abzusondern; zähle alsdann, auf der rechten Seite anfangend, die Zahlen, welche in jeder Columne enthalten sind, nach einander zusammen, und schreibe, wenn die Summe einer Columne 9 nicht übersteigt, sie so hin, wie sie gefunden worden, wenn sie aber Zehner enthält, so behalte man diese zurück um sie zur nächst folgenden Columne zuzuzählen; bei der lezten

Columne endlich, schreibe man die gefundene Summe gänzlich hin *).

Hier einige Beispiele zur Uebung.

7861	66947	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

Von der Subtraction.

§ 13.

Nachdem wir gelernt haben, eine Zahl aus mehrern andern durch Addition zusammen zu setzen, stellt sich zunächst die Aufgabe, von einer Zahl eine kleinere wegzunehmen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die erste Zahl in zwei Theile zu zerlegen, — so, daß einer dieser Theile der zweiten gegebenen Zahl gleich sey. Wenn man z. B. die Zahl 9 hat, und 4 davon wegnimmt, so wird die 9 durch diese Operation in zwei Theile zerlegt, welche addirt sie wiedererzeugen.

Um eine Zahl von einer andern wegzunehmen, muß man einen Weg einschlagen, der demjenigen entgegengesetzt ist, welcher zu Anfang des § 10 zur Auffindung der Summe zweier Zahlen vorgeschrieben worden; das heißt, man muß in

*) Wer die Gründe des angegebenen Verfahrens gefaßt hat, wird leicht einsehen, daß man an die Stelle der Einer eine Null unter die Columne setzen muß, wenn keine werthhabende Ziffer in dieser Columne enthalten ist und auch nichts von den vorhergehenden Columnen hinzuzuzählen gewesen, oder wenn die Summe der Columne keine Einheiten ihrer, sondern nur höherer Ordnung enthält, wie dies in folgenden Beispielen der Fall ist.

54050	8993
2020	6717
9010	4592
65080	20302

Uebers.

der Reihe der Namen, die den Zahlen beigelegt sind, von dem der größern an, so viele Stufen zurück gehen, als Einheiten in der kleinern Zahl enthalten sind, wodurch man zu dem Namen einer Zahl gelangen wird, welche der gesuchte Unterschied ist. So kommt man, wenn man vier Stufen hinter neun zurück geht, zu fünf, welches diejenige Zahl ist, die zu 4 addirt werden muß, um 9 zu bilden, und die anzeigt, um wie viel 9 die 4 übersteigt.

Unter dem letztern Gesichtspunkte betrachtet, ist 5 der Ueberschuß von 9 über 4. Wenn man aber nur die Ungleichheit der Zahlen 9 und 4 bemerklich machen will, ohne auf die Ordnung ihrer Größe zu sehen, so sagt man, daß 5 ihr Unterschied oder ihre Differenz sey; und wenn man die Operation macht, durch welche 4 von 9 weggenommen wird, so sagt man, daß 5 der Rest sey. Die Wörter Rest, Ueberschuß und Differenz, welche eine und dieselbe Sache bedeuten, entsprechen den verschiedenen Gesichtspunkten, unter welchen man die Zerlegung der Zahl 9 in die beiden Theile 4 und 5 betrachtet, eine Operation, welche Subtraction oder Abziehen genannt wird *).

§ 14.

Wenn große Zahlen von einander abgezogen werden sollen, so verrichtet man die Subtraction theilweise, indem man nach einander von den Einheiten einer jeden Ordnung der größern Zahl die correspondirenden der kleinern abzieht. Um dies auf eine bequeme Weise zu bewerkstelligen, schreibt man die Zahlen, wie 9587 und 345 in dem folgenden Beispiele, unter einander.

	9587
	345
Rest . .	9242

*) Die Zahl, von welcher abgezogen werden soll, heißt Minuendus, und die, welche abgezogen werden soll, heißt Subtrahendus. In obigem Beispiele ist 9 der Minuendus und 4 der Subtrahendus. Uebers.

Man ſetzt alsdann unter jeder Columne den Ueberſchuß der obern in dieſer Columne enthaltenen Zahl über die untere, indem man ſagt:

5 von 7 weggenommen läßt 2 zum Reſte,
4 von 8 weggenommen läßt 4 zum Reſte,
3 von 5 weggenommen läßt 2 zum Reſte,

und ſchreibt die Ziffer 9, von welcher nichts wegzunehmen iſt, daneben. Der Reſt 9242 giebt an um wie viel die Zahl 9587 die 345 überſteigt.

Die Richtigkeit dieſes Verfahrens iſt nicht zu bezweifeln; denn, wenn man von der größern Zahl alle Theile, aus welchen die kleinere beſteht, weggenommen hat, ſo hat man offenbar dieſe kleinere Zahl ſelbſt weggenommen.

§ 15.

Die Anwendung dieſes Verfahrens erfordert noch eine beſondere Vorſchrift, wenn in der Zahl, welche weggenommen werden ſoll, die Anzahl der Einheiten einer Ordnung größer iſt, als die Anzahl der Einheiten derſelben Ordnung in der andern Zahl. Wenn man z. B. 397 von 524 wegzunehmen hat,

524
397
Reſt . . 127

ſo kann man nicht ohne Weiteres die verſchiedenen Einheiten der untern Zahl von denen der obern weg nehmen. Aber die Zahl 524, welche hier als aus 5 Hunderten, 2 Zehnern und 4 Einern beſtehend dargeſtellt iſt, kann auch auf eine andere Weiſe ausgedrückt werden, wenn man die Anzahl der Einheiten einer Ordnung zerlegt, und einen Theil derſelben mit den Einheiten der nächſt niedrigern Ordnung vereinigt. Anſtatt der 2 Zehner und 4 Einer, welche in der erſtern Zahl vorkommen, kann man in Gedanken 1 Zehner und 14 Einer ſetzen. Zieht man dann von dieſen 14 Einern die 7 Einer der untern Zahl ab, ſo erhält man zum Reſte 7, die man hinſchreibt.

Durch dieſe Zerlegung enthält aber die obere Zahl jetzt nur noch einen Zehner, von welchem man die 9 Zehner der untern Zahl nicht wegnehmen kann. Nimmt man indeſſen von den 5 Hunderten der obern Zahl ein Hundert und fügt es zu jenem Zehner, ſo hat man 4 Hundert und 11 Zehner, von welchen letzteren man die 9 Zehner wegnehmen kann und 2 Zehner zum Reſte erhält. Nimmt man nun endlich von den noch übrigen 4 Hunderten der obern Zahl die 3 der untern weg, ſo erhält man 1 zum Reſte und hat alſo 127 zum Reſultate der vorgelegten Operation.

Dieſe Verfahrungsart beſteht, wie man ſieht, darin, daß man von den Einheiten der nächſt höhern Ordnung eine borgt und ihren Werth zu denjenigen, von welchen man zu ſubtrahiren hat, hinzufügt, ſodann aber jene nächſte Ziffer als um eine Einheit verringert betrachtet.

§ 16.

Wenn in der größern von den beiden Zahlen, Einheiten einer oder mehrerer Ordnungen fehlen, d. i. wenn Nullen darin vorkommen; ſo muß man bis zur erſten Werth habenden oder geltenden Ziffer fortſchreiten, um zu borgen. Hier ein Beiſpiel dieſes Falles

	27002
	13495
Reſt . .	13507

Da man die 5 Einer der untern Zahl von den 2 Einern der obern nicht wegnehmen kann, ſo legt man 10 Einer von den 7000 Einern, welche durch die Ziffer 7 der obern Zahl ausgedrückt werden, zu jenen 2 Einern der obern Zahl, welche dadurch in 2 Zehntauſende, 6990 und 12 zerlegt iſt. Zieht man nun von den 12 Einern die 5 Einer der untern Zahl ab, ſo erhält man 7 Einer zum Reſte.

Dieſe erſte Operation hat in der obern Zahl 6990 Einer oder 699 Zehner ſtatt 700 Zehner, welche durch die nächſt folgenden drei Ziffern ausgedrückt ſind, übrig gelaſſen, ſo daß da-

durch an die Stelle der beiden Nullen zwei 9 treten, und die erste geltende Ziffer um eine Einheit verringert wird. Fährt man hiernach mit der Subtraction fort, so wird man auf keine Schwierigkeit mehr stoßen, und den Rest 13507 finden.

§ 17.

Die Regel für das eben auseinander gesetzte Verfahren bei der Subtraction, läßt sich demnach folgendermaßen aussprechen: **Man schreibe die kleinere der beiden Zahlen unter die größere, so daß die Einheiten einer und derselben Ordnung in einer und derselben Columne zu stehen kommen, ziehe unter der erstern Zahl einen Strich, um sie von dem Resultate der Operation abzusondern, und subtrahire dann nach einander die untere Zahl einer jeden Columne von der obern, indem man auf der rechten Seite anfängt. Wenn die obere Zahl kleiner ist, vermehre man sie zuvor um 10, verringere aber dann die nächst folgende geltende Ziffer um 1, und setze an die Stelle jeder etwa zwischen liegenden Null eine 9.**

§ 18.

Wenn man die obere Zahl einer Columne um 1 zu verringern hat, kann man sie auch unverändert lassen, und statt dessen die untere Zahl derselben Columne um 1 vermehren, wodurch man zu einem Resultate kommt, das um 1 kleiner ist, als dasjenige, welches man erhalten haben würde, wenn man die beiden Zahlen, so wie sie da stehen genommen hätte; wie dies auch seyn soll. In dem ersten der folgenden Beispiele zieht man zuerst 6 von 14 ab, rechnet sodann die unten stehende 8 der zweiten Columne für eine 9, die man von 15 weg nimmt, und betrachtet die 7 der dritten Columne als eine 8 die man von der oben stehenden 8 abzieht.

16854	103034	49812002
9786	69845	18924983
7068	33189	30887019

Von der Probe der Addition und Subtraction.

§ 19.

Wenn man eine Rechnung durch ein Verfahren ausführt, deſſen Richtigkeit auf ſicheren Grundlagen beruht, ſo könnte es ſich immer noch ereignen, daß man in den theilweiſen Additionen oder Subtractionen, deren Reſultate man aus dem Gedächtniſſe zu nehmen gewohnt iſt, Fehler beginge. Um dieſem Uebelſtande zu begegnen benutzt man die Operation, welche derjenigen, die man gemacht hat, entgegen geſetzt iſt, und vermittelſt welcher man erkennen kann, ob das Reſultat richtig iſt. Dies nennt man die Probe der Rechnung machen.

Die Probe der Addition beſteht darin, daß man von der Summe der zuſammen gezählten Zahlen alle Theile der letztern wieder abzieht, wobei man keinen Reſt finden darf, wenn man richtig gerechnet hat. Wir wollen an dem Beiſpiele des § 11 zeigen, wie man dieſe Subtraction mit einem Male vollziehen kann.

527
2519
9812
73
8
12939
1120

Zuerſt zählt man die Zahlen der erſten Columne auf der linken Seite zuſammen, welche hier die Tauſende enthält; ihre Summe 11 zieht man von der Zahl 12 ab, mit welcher das Reſultat 12939 anfängt, und ſchreibt die Differenz 1, welche davon herrührt, daß man bei der Addition der Columne der Hunderte einen Zehner zurück behalten hatte, darunter. Die Summe der Hunderte allein genommen, beläuft ſich auf 18, und wenn man dieſe von den 9 Hunderten des Reſultates

ſultates und dem 1 Tauſend, das von der vorhergehenden Columne zur linken herrührt und als 10 Hunderte zu betrachten iſt, abzieht, ſo erhält man 1 zum Reſte, den man wieder darunter ſchreibt. Die Summe der Columne der Zehner, nämlich 11, von 13 abgezogen läßt 2 zum Reſte; und wenn man dieſe 2 Zehner zu den 9 Einern des Reſultates hinzufügt, ſo erhält man 29, welche Zahl grade die Summe der Columne der Einer ſeyn muß, weil auf dieſe keine andere Einfluß gehabt haben konnte. Zählt man alſo die Zahlen dieſer letzten Columne zuſammen, ſo muß man, wenn richtig gerechnet iſt, zu derſelben Zahl gelangen, und folglich keinen Reſt weiter erhalten. Dies iſt in dem gegenwärtigen Beiſpiele wirklich der Fall, und durch die Null bezeichnet, welche unter der letzten Columne geſetzt iſt. Das eben auseinandergeſetzte Verfahren läßt ſich folgendermaaßen zuſammen faſſen. **Um die Probe der Addition zu machen, zähle man jede Columne von neuem zuſammen, indem man auf der linken Seite anfängt, und ziehe jede der erhaltenen Summen von der Zahl ab, die unter der Columne befindlich iſt; ſchreibe dann den gefundenen Reſt darunter und zähle ihn als Zehner zu der nächſt folgenden Columne rechter Hand. Wenn nun richtig gerechnet iſt, ſo darf bei der letzten Columne kein Reſt übrig bleiben.**

§ 20.

Die Probe der Subtraction wird daraus hergeleitet, daß die kleinere der beiden gegebenen Zahlen mit dem Reſte zuſammen genommen die größere Zahl ausmacht. Will man ſich alſo von der Richtigkeit der folgenden Subtraction überzeugen,

524
297
227
524

ſo addire man den Reſt zur kleinern Zahl. Das Reſultat iſt hier wirklich der größern Zahl gleich.

Von der Multiplication.

§ 21.

Wenn die zu addirenden Zahlen einander gleich sind, so bekommt die Addition den Namen Multiplication (Vervielfältigung), weil alsdann die Summe zusammen gesetzt ist aus einer dieser Zahlen so viel mal genommen als die Anzahl derselben ist. Umgekehrt, wenn man eine Zahl mehrere Male nehmen will, braucht man nur diese Zahl so oft zu sich selbst hinzu zu fügen, als sie genommen werden soll weniger eins. Durch die folgende Addition zum Beispiel

16
16
16
16
64

nimmt man die Zahl 16 vier mal, wobei sie 3 mal zu sich selbst hinzugefügt wird. Eine Zahl 2 mal nehmen heißt sie verdoppeln; sie 3 mal, 4 mal u. s. w. nehmen heißt sie verdreifachen, vervierfachen u. s. w.

§ 22.

Die Multiplication begreift drei Zahlen in sich, nämlich: diejenige, welche eine Anzahl Mal genommen werden soll und die Multiplicandus heißt; die Zahl, welche die eben erwähnte Anzahl angiebt oder anzeigt, wie viel mal jene Zahl genommen werden soll und die Multiplicator heißt; endlich die Zahl, welche das Resultat der Operation ist und die Product genannt wird. Multiplicator und Multiplicandus bekommen den gemeinschaftlichen Namen Factor des Products. In dem obigen Beispiele ist 16 der Multiplicandus, 4 der Multiplicator, 64 das Product und 4 und 16 die Factoren von 64.

§ 23.

Wenn der Multiplicandus und der Multiplicator große Zahlen sind, würde die Auffindung des Productes durch Ad-

dition eine ſehr beträchtliche Zeit koſten. Deshalb hat man die Bildung des Productes dadurch abzukürzen geſucht, daß man ſie in eine gewiſſe Anzahl theilweiſer Operationen zerlegt, deren Reſultate man im Gedächtniſſe hat. Man wird z. B. die Zahl 16, 4 mal nehmen, wenn man erſtens die 6 Einer und dann den Zehner, aus welchen dieſe Zahl beſteht, vier mal nimmt. Es reicht alſo hin die Producte zu kennen, welche die Einheiten einer jeden Ordnung des Multiplicandus mit dem Multiplicator geben, wenn der letztere eine bloß einzifferige Zahl iſt, was darauf hinausläuft, die Producte jeder der 9 erſten Zahlen mit jeder andern von dieſen Zahlen zu kennen.

§ 24.

Dieſe Producte ſind in der folgenden Tafel enthalten, welche das Ein-mal-Eins oder die Pythagoriſche Tafel genannt wird, weil man ihre Einrichtung (vielleicht mit Unrecht) dem Pythagoras zuſchreibt.

Pythagoriſche Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§ 25.

Um dieſe Tafel zu bilden, ſchreibt man zuerſt die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 in eine Zeile. Sodann fügt man jede Zahl zu ſich ſelbſt hinzu und ſchreibt die Summen in die zweite Zeile, welche alſo das Doppelte einer jeden Zahl der erſten Zeile oder ihr Product mit 2 enthält. Ferner zählt man zu jeder Zahl der zweiten Zeile die correſpondirende der erſten Zeile und ſetzt die Summe in die dritte Zeile, wel-

also das Dreifache einer jeden Zahl der ersten Zeile oder ihr Product durch 3 enthält. Durch Addition der Zahlen der ersten und dritten Zeile bildet man die vierte, welche das Vierfache einer jeden Zahl der ersten Zeile oder ihr Product durch 4 enthält; und so fährt man fort bis man zur neunten Zeile kommt, welche das Product einer jeden Zahl der ersten Zeile durch 9 enthält.

Es ist hier der Ort zu bemerken, daß die verschiedenen Producte irgend einer Zahl durch 2, 3, 4, 5 u. s. w. **Vielfache** dieser Zahl heißen. So sind 6, 9, 12, 15 u. s. w. Vielfache von 3.

§ 26.

Wenn man die Bildung dieser Tafel wohl gefaßt hat, wird man auch den Gebrauch derselben leicht verstehen. Wollte man z. B. das Product von 7 mit 5 wissen, so braucht man nur in der fünften Zeile, welche die verschiedenen Producte der neun ersten Zahlen mit 5 enthält, diejenige Zahl zu nehmen, welche unter 7 steht, nämlich 35. Eben so ist es mit jedem andern Beispiele; **das Product findet sich in der Zeile des Multiplicators unter dem Multiplicandus.**

§ 27.

Wenn man in der obigen Tafel das Product von 5 mit 7 sucht, findet man, wie vorher, 35, obgleich jetzt 5 als Multiplicandus und 7 als Multiplicator betrachtet worden. Dasselbe kann man bei jedem andern Producte bemerken, welches in der Tafel enthalten ist. Ueberhaupt kann man in jeder Multiplication, welche es auch seyn mag, **die Ordnung der Factoren verwechseln, das heißt den Multiplicator als Multiplicandus und den Multiplicandus als Multiplicator nehmen.**

Da nun aber die Pythagorische Tafel nur eine beschränkte Anzahl Producte enthält, so wird es nicht hinreichen, die Richtigkeit des so eben ganz allgemein ausgesprochenen Satzes innerhalb dieser Tafel nachzuweisen; denn man könnte alsdann noch immer glauben, daß der Satz für größere Producte, de-

ren es ja unbegrenzt viele giebt, nicht Statt fände. Es wird daher nur eine Ueberlegung, welche auf die besonderen Werthe des Multiplicandus und Multiplicators keine Rücksicht nimmt, zeigen können, daß der Satz ohne Einschränkung wahr sey. Der Gang der folgenden Ueberlegung ist hierzu um so geeigneter, als er es bildlich darstellt, wie das Product zweier Zahlen entsteht. Um ihn faßlicher zu machen, wollen wir ihn zunächst auf die Zahlen 5 und 3 anwenden.

Wenn man in einer Zeile 5 mal die Ziffer 1 schreibt, und zwei gleiche Zeilen darunter setzt, nämlich:

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1

so wird die Anzahl der hingeschriebenen Ziffern 1 so viel mal aus 5 zusammen gesetzt seyn als Zeilen da sind, d. i. aus 3 mal 5. Da die Ziffern 1 aber auch in Columnen dastehn, von denen jede 3 enthält, so findet man, wenn man auf diese Weise zählt, so viel mal 3 Einheiten als Columnen da sind, oder 5 mal 3 Einheiten. Da nun das Resultat gar nicht davon abhängen kann, auf welche Weise man gezählt hat, so folgt, daß 3 mal 5, und 5 mal 3 dasselbe Product geben. Es ist leicht, dieselbe Ueberlegung bei irgend zwei andern Zahlen, welche man will, anzustellen, indem man in jede Zeile so viele Einheiten setzt, als im Multiplicandus enthalten sind, und so viel Zeilen hinschreibt, als der Multiplicator Einheiten enthält. Zählt man alsdann nach Zeilen, so erhält man den Multiplicandus so viel mal genommen als Einheiten im Multiplicator sind. Aber die hingeschriebenen Ziffern bilden auch Columnen, und zwar so viel als Einheiten in einer Zeile stehen, und jede dieser Columnen enthält so viel Einheiten als Zeilen da sind. Wenn man also nach Columnen zählt, erhält man die Anzahl der Zeilen oder den Multiplicator so viel mal genommen als der Multiplicandus anzeigt. Es ist also bei der Bildung eines Productes zweier Zahlen erlaubt, eine von beiden, welche man will, zum Multiplicator zu nehmen.

§ 28.

Die Ueberlegung, welche wir so eben angestellt haben um die Richtigkeit des vorhergehenden Satzes darzuthun, ist der Beweis desselben; und darin besteht wesentlich die Methode der reinen Mathematik, daß sie weder Sätze noch Verfahrungsweisen gelten läßt, die nicht entweder aus dem schon Vorhergegangenen nothwendig folgen, oder deren Wahrheit nicht ganz allgemein und unabhängig von bestimmten Beispielen eingesehen werden kann; wie denn überhaupt Beispiele niemals die Beweise ersetzen, sondern nur dazu dienen das Verständniß der Sätze dem Leser zu erleichtern, oder ihm die Anwendung der Regeln zu verdeutlichen.

§ 29.

Wenn man alle Producte kennt, welche die 9 ersten Zahlen, zu zweien mit einander multiplicirt, geben, so kann man zufolge desjenigen, was in § 23 gesagt worden, jede beliebige Zahl mit einer einzifferigen Zahl multipliciren, indem man nach einander die Producte der Einheiten einer jeden Ordnung des Multiplicandus mit dem Multiplicator bildet. Die Operation wird auf folgende Weise angeordnet:

526
7
3682

Das Product der Einer des Multiplicandus, 6, mit dem Multiplicator, 7, ist 42, wovon man nur die 2 Einer hinschreibt und die 4 Zehner zurückhält, um sie zu den Zehnern, die sich noch finden werden, hinzuzufügen.

Das Product der Zehner des Multiplicandus, 2, mit dem Multiplicator, 7, ist 14, und wenn man die vorher zurückgehaltenen 4 Zehner dazu zählt, so erhält man 18, wovon man wieder nur die Einer hinschreibt, und die Zehner für das Folgende zurückhält.

Das Product der Hunderte des Multiplicandus, 5, mit dem Multiplicator, 7, ist 35, welches um die 1 vermehrt, die

man vorher zurückgehalten, 36 giebt, welche letztere gänzlich hingeschrieben wird, weil keine Ziffern im Multiplicandus mehr vorhanden sind.

§ 30.

Dieses Verfahren läßt sich folgendermaßen ausdrücken: **Um eine mehrzifferige Zahl mit einer einzifferigen zu multipliciren, setzt man den Multiplicator unter die Einer des Multiplicandus und zieht unter diesen Zahlen einen Strich, um sie von dem Producte abzusondern. Dann multiplicirt man nach einander die Einheiten einer jeden Ordnung des Multiplicandus mit dem Multiplicator, indem man auf der rechten Seite anfängt; man schreibt das Product gänzlich hin, wenn es nicht größer als 9 ist, behält aber im andern Falle die Zehner desselben zurück, um sie zum folgenden Producte hinzuzuzählen. So fährt man fort bis zur letzten Ziffer des Multiplicandus, bei welcher man das Product so hinschreibt, wie es sich findet.**

Es ist einleuchtend, daß, wenn der Multiplicandus mit Nullen endigt, die Operation erst bei der ersten geltenden Ziffer dieser Zahl anheben darf, und daß man eben so viel Nullen auf die rechte Seite des Productes setzen muß, als im Multiplicandus stehen, damit es den Werth erhalte, den es haben soll. Was die Nullen betrifft, die zwischen den Ziffern des Multiplicandus stehen, so ist klar, daß sie kein Product geben, und daß man also eine Null hin zu setzen haben wird, wenn man von dem vorhergehenden Producte nichts zurückgehalten hat.

Folgende Beispiele geben wir nur zur Uebung des Lesers.

956	8200	7010	80970
6	9	5	4
5736	73800	35050	323880

§ 31.

Da unter den mehrzifferigen Zahlen, 10, 100, 1000, u. s. w. die einfachsten sind, so muß man zunächst suchen, wie man

eine gegebene Zahl mit jeder dieſer Zahlen multipliciren könne. Wenn man ſich nun desjenigen erinnert, was in § 6 feſtgeſetzt worden, wonach eine und dieſelbe Ziffer einen 10 und 10 mal größern Werth bekommt je weiter und weiter man ſie, von der rechten Seite nach der linken hin, fortrückt, und wenn man in Erwägung zieht, daß man, um eine Zahl mit 10 zu multipliciren, die in ihr enthaltenen Einheiten einer jeden Ordnung 10 mal ſo groß machen, alſo die Einer in Zehner, die Zehner in Hunderte u. ſ. f. verwandeln muß; ſo wird man leicht begreifen, daß eine jede gegebene Zahl mit 10 multiplicirt wird, wenn man ihr auf der rechten Seite eine Null anhängt, indem dadurch alle ihre geltende Ziffern um eine Stelle weiter nach der linken Seite hingerückt werden.

Aus demſelben Grunde wird man eine jede Zahl mit 100 multipliciren, wenn man ihr auf der rechten Seite zwei Nullen anhängt, weil die Zahl durch die erſte Null 10 mal größer und durch die zweite Null noch 10 mal größer, und folglich 10 mal 10, oder 100 mal ſo groß werden wird, als ſie urſprünglich geweſen.

Wenn man dieſe Ueberlegung weiter fortführt, wird man einſehen, daß man eine Zahl mit 10, 100, 1000, u. ſ. w. multiplicirt, wenn man dem Multiplicandus auf ſeiner rechten Seite ſo viel Nullen anhängt, als neben der 1 des Multiplicators ſtehen.

§ 32.

Wenn die geltende Ziffer des Multiplicators nicht 1 iſt, wenn alſo z. B. gefodert würde mit 30, 300 oder 3000 zu multipliciren, was nichts anderes als mit 10 mal 3, 100 mal 3, oder 1000 mal 3 multipliciren iſt; ſo zerfällt die Operation in zwei andere. Man multiplicirt nämlich zuerſt mit der geltenden Ziffer 3 nach der Regel des § 30, und ſodann das Product mit 10, 100 oder 1000 dadurch, daß man ihm eine, zwei oder drei Nullen anhängt, wie es im vorigen Hen gelehrt worden.

Es ſey z. B. 764 mit 300 zu multipliciren

764
300
Product . . . 229200

Die vier geltenden Ziffern dieſes Productes rühren von der Multiplication von 764 mit 3 her, und ſie ſind zwei Stellen weiter nach der linken Seite hin gerückt, um die beiden Nullen, mit welchen der Multiplicator endigt, anhängen zu können.

Ueberhaupt, wenn der Multiplicator mit einer beliebigen Anzahl Nullen endigt, ſo multiplicirt man zunächſt den Multiplicandus mit der geltenden Ziffer, und hängt dem erhaltenen Producte eben ſo viel Nullen an als der Multiplicator hat.

§ 33.

Die vorhergehenden Regeln laſſen ſich auch auf den Fall anwenden, in welchem der Multiplicator irgend eine beliebige Zahl iſt, wenn man die Einheiten der verſchiedenen Ordnungen, aus welchen er zuſammen geſetzt iſt, für ſich betrachtet. Die Zahl 793 zum Beiſpiel mit 345 multipliciren, oder, was daſſelbe iſt, die Zahl 793, 345 mal nehmen, iſt nichts anderes als 793, 5 mal und 40 mal und 300 mal nehmen; nnd die zu verrichtende Operation iſt auf dieſe Weiſe in drei andere zerlegt, in welchen die Multiplicatoren, 5, 40 und 300, nur eine geltende Ziffer haben. Um die Reſultate dieſer drei Operationen leicht zuſammenzählen zu können, ordnet man die Rechnung folgendermaßen an:

793
345
3965
31720
237900
273585

Man multiplicirt nämlich den Multiplicandus nach einander mit den Einern, Zehnern, Hunderten, u. ſ. w. des Multiplicators, und hängt dem Partial-Producte, welches die Zeh-

ner des Multiplicators geben, eine Null, und demjenigen, welches die Hunderte hervorbringen, zwei Nullen auf der rechten Seite an, wodurch das erste dieser Producte um eine, und das zweite um zwei Stellen nach der linken Seite hingerückt wird. Sodann addirt man diese drei Partial-Producte um das Total-Product der gegebenen Zahlen zu erhalten.

Da die Nullen, welche den Partial-Producten angehängt sind, bei dieser Addition für nichts gerechnet werden, so kann man sich überheben sie hinzuschreiben, wenn man nur Sorge trägt die erste Ziffer des Productes, das jede geltende Ziffer des Multiplicators giebt, in diejenige Stelle zu setzen, welche sie einnehmen muß, das heißt die erste Ziffer des Productes, welches die Zehner des Multiplicators geben, in die Stelle der Zehner, die erste Ziffer des Productes, welches die Hunderte des Multiplicators geben, in die Stelle der Hunderte, u. s. w.

§ 34.

Zufolge des Vorhergehenden hat man folgende Regel: **Um zwei beliebige Zahlen mit einander zu multiplicieren, macht man nach einander die Producte des Multiplicandus mit den Einheiten einer jeden Ordnung des Multiplicators** (nach der im § 30 gegebenen Regel), **setzt die erste Ziffer eines jeden dieser Partial-Producte unter die Einheiten derjenigen Ordnung, von welcher die Ziffer des Multiplicators ist, welche das Partial-Product giebt, und addirt sodann alle diese Partial-Producte.**

§ 35.

Wenn der Multiplicandus mit Nullen endigt, kann man alle Partial-Multiplicationen bei der ersten geltenden Ziffer des Multiplicandus anfangen; dann muß man aber, um die Ziffern des Total-Productes in die gehörigen Stellen zu bringen, der Summe der Partial-Producte so viele Nullen anhängen als der Multiplicandus hatte.

Wenn der Multiplicator mit einer oder mehrern Nullen endigt, kann man auch dieſe, zufolge deſſen, was im § 32 geſagt worden, weglaſſen, wenn man nur dem Total-Producte eben ſo viel Nullen auf der rechten Seite anhängt.

Hieraus ergiebt ſich, daß, wenn der Multiplicator und der Multiplicandus mit Nullen endigen, man nur die Multiplication an den geltenden Ziffern zu verrichten braucht, und dem auf dieſe Weiſe erhaltenen Producte ſo viel Nullen anzuhängen hat, als im Multiplicator und Multiplicandus zuſammen genommen vorhanden ſind.

Wenn zwiſchen den geltenden Ziffern des Multiplicators Nullen ſtehen, ſo kann man ſie übergehen, wenn man nur das Product, welches die, dieſen Nullen zur linken ſtehende, geltende Ziffer giebt, in die ihm zukommende Stelle ſetzt.

Der Leſer mag folgende Beiſpiele zu ſeiner Uebung berechnen:

300	526	9648
40	307	5137
12000	3682	67536
	1578	28944
	161482	9648
		48240
		49561776

Von der Diviſion.

§ 36.

Da das Product zweier Zahlen dadurch gebildet wird, daß man die eine ſo viel mal nimmt als die andere Einheiten enthält (§ 21), ſo kann man von jedem Producte einen ſeiner Factoren wieder erhalten, wenn man unterſucht, wie viel mal dieſes Product den andern Factor enthält; und die Subtraction allein würde zu dieſer Unterſuchung hinreichen.

Denn, wenn man z. B. wiſſen wollte, wie viel mal die Zahl 64 die 16 enthält, ſo brauchte man nur 16 ſo viel mal von 64 abzuziehen als es angeht, und da nach vier Subtractionen nichts übrig bleiben würde, ſo kann man daraus ſchließen, daß 64 die 16, 4 mal enthält. Dieſe Art der Zerlegung einer Zahl durch eine andere, um zu erfahren, wie viel mal jene Zahl dieſe enthält, heißt Diviſion, weil ſie dazu dient eine gegebene Zahl in gleiche Theile, deren Anzahl oder deren Werth gegeben iſt, einzutheilen.

Wenn man z. B. 64 in 4 gleiche Theile zu theilen hat, muß man, um die Größe dieſer Theile zu finden, die Zahl ſuchen, welche 4 mal in 64 enthalten iſt, und alſo 64 als ein Product betrachten, deſſen einer Factor 4 und der andere einer jener geſuchten Theile, hier nämlich 16, iſt. Wenn man aber wiſſen wollte, aus wie viel Theilen, von denen jeder gleich 16 iſt, die Zahl 64 zuſammen geſetzt iſt, müßte man, um die Anzahl dieſer Theile zu finden, unterſuchen wie viel mal 64 die 16 enthält, und alſo 64 als ein Product betrachten, deſſen einer Factor 16 und der andere die geſuchte Anzahl, hier nämlich 4, iſt.

Alſo welchen Gebrauch man auch von der Diviſion machen will, ſo iſt ihr Zweck immer: einen Factor eines gegebenen Productes zu finden, wenn der andere bekannt iſt.

§ 37.

Die Zahl, welche getheilt oder dividirt werden ſoll, heißt Dividendus, und der bekannte Factor, durch welchen getheilt oder dividirt werden ſoll, Diviſor. Der unbekannte Factor, den man durch die Diviſion findet, wird Quotient genannt, und dieſer zeigt immer an, wie viel mal der Diviſor in dem Dividendus enthalten iſt.

Hieraus folgt, daß der Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt den Dividendus geben muß.

§ 38.

Wenn der Dividendus den Diviſor ſehr viel mal ent-

hält, ist die Anwendung der wiederholten Subtraction unausführbar; man muß alsdann seine Zuflucht zu einer Abkürzung nehmen, welche der bei der Multiplication angewandten ähnlich ist.

Wenn der Dividendus nicht 10 mal so groß ist als der Divisor, was durch die bloße Ansicht beider Zahlen schon klar ist, und wenn überdies der Divisor nur einzifferig ist, so findet man den Quotienten aus der Pythagorischen Tafel (§ 24), weil sie alle Producte enthält, deren Factoren einzifferige Zahlen sind. Wenn man z. B. wissen will, wie viel mal 56 die 8 enthält, muß man in der 8ten Columne bis zu der Zeile gehen, in welcher 56 enthalten ist, und die Ziffer 7, welche zu Anfang dieser Zeile steht, zeigt den zweiten Factor von 56 an, oder wie viel mal diese Zahl die 8 enthält.

Aus dieser Tafel ist auch ersichtlich, daß es Zahlen giebt, die durch andere Zahlen nicht genau theilbar sind. In der siebenten Zeile z. B., welche alle Vielfache von 7 enthält, kommt die Zahl 40 nicht vor, woraus sich ergiebt, daß 40 nicht durch 7 theilbar ist. Da aber diese Zahl zwischen den Zahlen 35 und 42 liegt (welche in jener Zeile unmittelbar neben einander stehen), so ist 35 das größte Vielfache von 7, welches 40 enthält. Mit diesen Vorkenntnissen und durch die Betrachtungen, welche wir sogleich anstellen werden, läßt sich jede Division ausführen.

§ 39.

Es sey, z. B. 1656 durch 3 zu dividiren, so kann man die Aufgabe in folgende verwandeln: **Eine solche Zahl zu finden, daß man, wenn ihre Einer, Zehner, Hunderte, u. s. w. mit 3 multiplicirt werden, die Einer, Zehner, Hunderte, u. s. w. des Dividendus 1656 zum Producte erhalte.**

Man sieht leicht ein, daß diese Zahl keine Einheiten einer höhern Ordnung als Tausende haben wird; denn wenn sie nur Zehntausende hätte, so würde auch das Product Zehn-

tauſende enthalten, was nicht der Fall iſt. Sie wird aber auch nicht einmal Tauſende haben, denn wenn ſie nur ein Tauſend hätte, würde das Product wenigſtens 3 Tauſend enthalten, was gleichfalls nicht Statt findet. Hieraus folgt, daß das Tauſend, welches im Dividendus ſteht, von der Multiplication der Hunderte des Quotienten mit dem Diviſor 3 herrühren muß. Alſo muß die Anzahl der Hunderte des Quotienten ſo groß ſeyn, daß, wenn man ſie mit 3 multiplicirt, 16 oder bloß das größte Vielfache von 3 entſteht, welches in 16 enthalten iſt, weil bei der Multiplication der andern Ziffern des Quotienten mit dem Diviſor etwas zurück gehalten und zu dem Producte der Hunderte hinzugefügt ſeyn kann. Die Zahl, welche die erwähnte Bedingung erfüllt, iſt 5, und da 5 Hunderte mit 3 multiplicirt, 15 Hunderte geben, der Dividendus aber 16 Hunderte enthält, ſo rührt der Unterſchied von 1 Hundert von demjenigen her, was bei der Multiplication der andern Ziffern des Quotienten mit dem Diviſor zurückgehalten worden. Zieht man jetzt das Partial-Product 15 Hunderte, oder 1500, von dem Total-Product 1656 ab, ſo wird der Reſt 156 die Producte der Einer und Zehner des Quotienten mit dem Diviſor enthalten, ſo daß es nur noch darauf ankommt die Zahl zu finden, welche mit 3 multiplicirt, 156 giebt, eine Aufgabe, welche der völlig ähnlich iſt, die urſprünglich vorgelegt war. Wenn man alſo in dieſer neuen Aufgabe, die erſte Ziffer des Quotienten auf dieſelbe Weiſe wie vorher gefunden hat, ſo multiplicirt man die durch ſie bezeichnete Zahl mit dem Diviſor, zieht das Partial-Product von 156 ab, und erhält dadurch einen neuen Dividendus, mit dem man wie mit dem frühern verfährt, und dies ſo lange fortſetzt bis der urſprüngliche Dividendus erſchöpft iſt.

§ 40.

Die Operation, die wir eben beſchrieben haben, kann folgendermaßen angeordnet werden:

Divid.	1656	3	Diviſ.
	15	552	Quot.
	15		
	15		
	06		
	6		
	0		

Der Dividendus und der Diviſor werden durch einen
trich von einander abgeſondert, und unter dem Diviſor wird
ı zweiter Strich gezogen, um den Quotienten darunter
reiben zu können. Man nimmt ſodann auf der linken
eite des Dividendus einen Theil, 16, welcher den Diviſor,
enthalten kann, dividirt ihn durch 3, und bekommt dadurch
als erſte Ziffer des Quotienten. Hierauf macht man das
roduct des Diviſors mit der eben gefundenen Zahl, zieht es
n dem Partial-Dividendus, 16, ab, ſchreibt den Reſt, 1,
runter und ſetzt die Zehner des Dividendus, 5, daneben.
un betrachtet man dieſe Zahl, 15, als einen neuen Partial-
ividendus, dividirt ſie durch 3, und erhält 5, als zweite
ffer des Quotienten. Dann macht man wieder das Pro-
ct dieſer Zahl, 5, mit dem Diviſor, zieht es von dem Par-
l-Dividendus ab, erhält 0 zum Reſte, und ſetzt die 6 des
ividendus daneben. Nun dividirt man endlich dieſen dritten
artial-Dividendus durch 3, und bekommt dadurch 2 als
te Ziffer des Quotienten.

§ 41.

Wenn man einen Partial-Dividendus findet, welcher
ı Diviſor nicht enthält, ſo kann dies, wie leicht einzuſehen
, nur daher kommen, daß der Quotient keine Einheiten der-
igen Ordnung hat, von welcher dieſer Dividendus iſt, und
ß die Einheiten dieſer Ordnung im Dividendus nur von
n Producte des Diviſors mit den Einheiten niedrigerer
dnungen des Quotienten herrühren. Man muß alſo in
ſem Falle eine 0 in dem Quotienten ſetzen, um die Stelle
r Einheiten der fehlenden Ordnung auszufüllen.

Es ſey z. B.

1535	5
15	307
035	
35	
00	

Die Diviſion der 15 Hunderte durch den Diviſor läßt keinen Reſt, und die 3 Zehner, welche den zweiten Partial-Dividendus bilden, können den Diviſor nicht enthalten. Hieraus ergiebt ſich, daß der Quotient keine Zehner haben kann, und daß man ihre Stelle mit einer Null ausfüllen muß, um der erſten Ziffer des Quotienten den Werth zu geben, den ſie haben ſoll. Setzt man ſodann die letzte Ziffer des gegebenen Dividendus herunter, ſo erhält man den dritten Partial-Dividendus, welcher durch 5 dividirt, 7 als die Einer des Quotienten giebt. Dieſer Quotient iſt alſo 307.

§ 42.

Die im § 40 angeſtellten Betrachtungen laſſen ſich auch auf die Fälle anwenden, in welchen der Diviſor eine mehrzifferige Zahl iſt.

Wenn z. B. verlangt wird 57981 durch 251 zu dividiren, ſieht man leicht, daß der Quotient keine Ziffern einer höhern Ordnung als Hunderte hat; denn wenn er nur Tauſende hätte, würde der Dividendus Hunderttauſende enthalten müſſen, was nicht Statt findet. Außerdem aber muß die Anzahl der Hunderte ſo groß ſeyn, daß ſie mit 251 multiplicirt, 579 oder das größte Vielfache von 251 giebt, welches in 579 enthalten iſt, indem der Ueberſchuß alsdann davon herkommt, daß bei der Multiplication der andern Ziffern des Quotienten etwas zurück gehalten iſt. Die Zahl, welche dieſer Bedingung genügt, iſt 2; aber 2 Hunderte mit 251 multiplicirt, geben 502, und der Dividendus enthält 579 Hunderte; die Differenz, 77 Hunderte, kommt alſo von demjenigen her, was bei der Multiplication der andern Ziffern des Quotienten zurück behalten worden.

Zieht

Zieht man jetzt das Partial-Product, nämlich 502 Hunderte oder 50200 von dem Total-Producte 57981 ab, so wird der Rest 7781 die Producte der Einer und der Zehner des Quotienten mit dem Divisor enthalten, so daß es nur noch darauf ankommt die Zahl zu finden, welche mit 251 multiplicirt 7781 zum Producte giebt. Also, wenn man die erste Ziffer des Quotienten bestimmt hat, multiplicirt man die durch sie ausgedrückte Zahl mit dem Divisor, zieht das Partial-Product von dem gegebenen Total-Producte ab, und erhält dadurch einen neuen Dividendus, mit dem man wie mit dem vorhergehenden verfährt, und dies so lange fortsetzt bis der Dividendus erschöpft ist.

Ueberhaupt muß man immer um die erste Ziffer des Quotienten zu erhalten, so viel Ziffern auf der linken Seite des Dividendus absondern, daß die durch sie ausgedrückte Zahl, als Einer betrachtet, den Divisor enthalten könne, und dann die Partial-Division vollziehen.

§ 43.

Wenn man die Rechnung wie oben (§ 40) anordnet, so geschehen die eben angegebenen Operationen in nachstehender Reihefolge.

57981	251
502	231
778	
753	
251	
251	
000	

Man nimmt die ersten drei Ziffern auf der linken Seite des Dividendus als ersten Partial-Dividendus, dividirt ihn durch den Divisor, und schreibt in den Quotienten die daraus hervorgehende Zahl 2 hin. Mit dieser Zahl multiplicirt man den Divisor, setzt das Product, 502, unter den Partial-Dividendus, 579, und zieht jene Zahl von diesen [illegible] den Rest, 77, setzt man die Zehner, 8, des

den neuen Partial-Dividendus durch den Divisor, und schreibe die 3, welche man erhält, als zweite Ziffer des Quotienten hin. Mit dieser Zahl, 3, multiciplirt man den Divisor, zieht das Product, 753, von dem Partial-Dividendus ab, und setzt neben den Rest, 25, die letzte Ziffer des Dividendus, 1. Dieser letzte Partial-Dividendus, 251, welcher dem Divisor gleich ist, gibt 1 als Einer des Quotienten.

§ 44.

Wenn der Divisor eine mehrzifferige Zahl ist, könnte man einige Schwierigkeit finden, zu bestimmen, wie viel mal dieser Divisor in dem Partial-Dividendus enthalten ist. An dem folgenden Beispiele wollen wir zeigen, wie man hierzu gelangt.

423405	485
3880	873
3540	
3395	
1455	
1455	
0000	

Nachdem man hier vier Ziffern auf der linken Seite des Dividendus genommen hat, damit man eine Zahl habe, in welcher der Dividendus enthalten ist, sieht man nicht sogleich wie viel mal 4234 die 485 enthält. Um die Auffindung dieses ersten Partial-Quotienten sich zu erleichtern, bemerke man, daß der Divisor zwischen 400 und 500 liegt, und daß, wenn er eine von diesen beiden Zahlen wäre, die Aufgabe darin bestehen würde, zu finden, wie viel mal 4 Hunderte oder 5 Hunderte in den 42 Hunderten der Zahl 4234 enthalten sind, oder, was auf dasselbe hinaus läuft, wie viel mal die Zahlen 4 oder 5 in 42 enthalten sind. Da man nun für die erste Zahl 10 und für die zweite 8 findet, so muß offenbar der gesuchte Quotient zwischen 8 und 10 liegen. Es ist aber auch ersichtlich, daß er nicht 10 seyn kann, weil dann die Einheiten des Dividendus, die von höhern Ordnungen als die Hunderte sind, den Divisor enthalten müßten, was nicht Statt findet.

Es bleibt also nur zu versuchen übrig, welche von den Zahlen 8 nnd 9, mit dem Divisor multiplicirt, ein Product giebt, das von 4234 abgezogen werden kann. Man findet, daß dies 8 ist, welche also die erste Ziffer des Quotienten seyn muß. Zieht man von dem Partial-Dividendus das Product des Divisors mit 8 ab, so erhält man 354 zum Reste, und wenn man die Null, welche im Dividendus in der Stelle der Zehner steht, dazu setzt, einen zweiten Partial-Dividendus, mit dem man wie mit dem vorhergehenden verfährt, und so fort.

§ 45.

Faßt man den Inhalt der vorigen § § zusammen, so ergiebt sich die Regel: Um eine Zahl durch eine andere zu dividiren, setze man den Divisor auf die rechte Seite des Dividendus, sondere beide durch einen Strich von einander ab, und ziehe auch unter dem Divisor einen Strich, um den Quotienten darunter zu schreiben. Man nehme sodann auf der linken Seite des Dividendus so viele von seinen Ziffern, als wenigstens erfoderlich sind, damit die durch sie ausgedrückte Zahl den Divisor enthalte; suche wie viel mal die durch die erste Ziffer des Divisors ausgedrückte Zahl in derjenigen enthalten ist, welche die erste oder die beiden ersten Ziffern des Partial-Dividendus ausdrücken, und multiplicire den Quotienten, der vorläufig nur als näherungsweise richtig zu betrachten ist, mit dem Divisor; ist das Product größer als der Partial-Dividendus, so verringere man den Quotienten nach und nach, und so lange als nöthig ist, damit man ein Product erhalte, welches sich von dem Partial-Dividendus wegnehmen läßt. Man verrichte die Subtraction, und wenn dabei ein Rest sich fände, der größer als der Divisor ist, so wäre dies ein Zeichen, daß man den Quotienten zu sehr verringert, und daß man ihn also größer zu nehmen habe. Zu dem Reste setze man die

folgende Ziffer des gegebenen Dividendus herunter, und ſuche, wie vorher, wie viel Mal der Diviſor in dieſem Partial-Dividendus enthalten iſt; ſchreibe die gefundene Zahl in den Quotienten, und multiplicire ſie mit dem Diviſor, um das Product von dem Partial-Dividendus zu ſubtrahiren. Auf dieſe Weiſe fahre man fort bis alle Ziffern des gegebenen Dividendus herunter geſetzt ſind. Trifft man auf einen Partial-Dividendus, welcher den Diviſor nicht enthält, ſo muß man, ehe man von neuem eine Ziffer des Dividendus herunter ſetzt, eine Null in den Quotienten ſchreiben.

§ 46.

Man kann den Raum, welchen eine Diviſion nach der angegebenen Weiſe auf dem Papiere einnehmen würde, dadurch verkürzen, daß man die Subtractionen der Producte des Diviſors mit einer jeden Ziffer des Quotienten in Gedanken verrichtet, wie dies an folgendem Beiſpiele zu erſehen iſt.

1755	39
195	45
000	

Nachdem man gefunden, daß der erſte Partial-Dividendus, 175, den Diviſor, 39, 4mal enthält, multiplicirt man die 9 Einer des letztern mit 4, was 36 giebt. Um dieſe 36 Einer von den Einern des Partial-Dividendus abzuziehen, fügt man zu ſeinen 5 Einern 4 Zehner, ſo daß man 45 hat, von welchen die 36 weggenommen 9 übrig laſſen. Man behält ſodann die 4 Zehner um ſie in Gedanken zu dem Producte, 12, des Quotienten mit den Zehnern des Diviſors hinzuzufügen, wodurch man 16 erhält; und dadurch, daß man nun dieſe 16 Zehner von den 17 Zehnern abzieht, nimmt man zugleich die 4 Zehner weg, welche man zu den Einern des Dividendus hinzugefügt hatte, um die vorhergehende Subtraction möglich zu machen. Eben ſo verfährt man mit dem

zweiten Partial-Dividendus 195. Man sagt nämlich: 5 mal 9 ist 45, 45 von 45 läßt Null; ferner 5 mal 3 ist 15, und 4 Zehner dazu ist 19, 19 von 19 läßt Null zum Reste.

Aus diesem Beispiele wird man hinlänglich ersehen, wie man sich bei jedem andern noch so zusammengesetzten zu benehmen hat.

§ 47.

Die Division läßt sich noch mehr abkürzen, wenn der Divisor und der Dividendus mit Nullen endigen, weil man so viele Nullen am Ende einer jeden dieser beiden Zahlen ausstreichen kann, als in derjenigen vorkommen, welche die wenigsten hat.

Wenn z. B. 84000 durch 400 dividirt werden soll, so reducire man diese beiden Zahlen auf 840 und 4, wodurch der Quotient nicht geändert wird, weil man bloß die Namen der Einheiten verändert, wenn man statt 84000 oder 840 Hunderte und statt 400 oder 4 Hunderte, 840 Einer und 4 Einer setzt, und der Quotient der Zahlen 840 und 4 immer derselbe ist, welches auch ihre Einheiten seyn mögen.

Es muß bemerkt werden, daß man durch das Weglassen der beiden Nullen am Ende der gegebenen Zahlen, die eine und die andere zugleich durch 100 dividirt hat; denn es folgt aus § 31, daß eine Zahl durch 10 oder 100 oder 1000 u. s. w. dividirt wird, wenn man 1, oder 2, oder 3 u. s. w. Nullen auf ihrer rechten Seite ausstreicht.

Divisions-Exempel:

144	3	,16512	344	3049164	6274
24	48	2752	48	53956	486
00		0000		37644	
				00000	

§ 48.

Die Division und die Multiplication dienen einander gegenseitig zur Probe, eben so wie die Addition und die Subtraction. Denn zufolge der Erklärung der Division (§ 36),

findet man einen Factor eines Productes, wenn man daſſelbe durch ſeinen andern Factor dividirt; und wenn man den Diviſor mit dem Quotienten multiplicirt, muß man den Dividendus wieder erhalten (§ 37).

Von den Brüchen.

§ 49.

Die Diviſion kann nicht immer genau ausgeführt werden, weil nicht jede Anzahl Einheiten aus jeder andern Anzahl Einheiten, wenn man dieſe mehrere mal nimmt, zuſammengeſetzt werden kann. Wir haben davon in der Pythagoriſchen Tafel ſchon Beiſpiele geſehen (§ 38). Dieſe Tafel umfaßt nur die Producte der neun erſten Zahlen zu zweien mit einander multiplicirt, ſie enthält aber nicht alle Zahlen zwiſchen 1 und 81, welches die erſte und letzte der darin vorkommenden Zahlen ſind. Die oben auseinandergeſetzte Methode führt alsdann nur zu dem größten Vielfacheh des Diviſors, welches in dem Dividendus enthalten iſt.

Wenn man, nach der Vorſchrift des § 46, 239 durch 8 dividirt,

239	8
79	29
7	

ſo erhält man, wie die vorſtehende Operation zeigt, 79 zum letzten Partial-Dividendus, eine Zahl, welche durch 8 nicht genau theilbar iſt, die aber zwiſchen den Zahlen 72 und 80 liegt, von welchen die erſte 9 mal, und die zweite 10 mal den Diviſor enthält. Hieraus ſieht man, daß der letzte Theil des Quotienten größer als 9 und kleiner als 10 iſt, und daß folglich der Total-Quotient zwiſchen 29 und 30 liegt. Multiplicirt man alſo die 9 Einer des Quotienten mit dem Diviſor, 8, und zieht das Product von dem letzten Partial-Dividendus, 79, ab, ſo iſt offenbar der Reſt, 7, der

Ueberſchuß des Dividendus, 239, über das Product der Factoren 29 und 8. Denn indem man, durch die einzelnen Theile der Operation, von dem Dividendus, 239, das Product jeder Ziffer des Quotienten mit dem Diviſor abgezogen hat, iſt das Product des ganzen Quotienten mit dem Diviſor, oder 232, ſubtrahirt worden, und da der Reſt, 7, kleiner als der Diviſor iſt, ſo folgt, daß 232 das größte Vielfache von 8 iſt, welches der Dividendus, 239, enthält.

§ 50.

Aus dem eben Geſagten geht zugleich hervor, daß man den Dividendus wieder erhält, wenn man zu dem Producte des Diviſors mit dem Quotienten den bei der Diviſion übrig gebliebenen Reſt hinzufügt.

§ 51.

Wenn man die Theilung einer Größe irgend einer Art, die aus 239 Einheiten beſteht, in 8 gleiche Theile wirklich ausführen will, ſo iſt es unumgänglich nöthig Theile von Einheiten zu machen, oder, was daſſelbe iſt, Brüche in die Rechnung einzuführen. Denn, wenn man von der Zahl 239, 8 mal 29 Einheiten weggenommen hat, bleiben noch 7 Einheiten in 8 Theile zu theilen übrig. Um dies zu bewerkſtelligen, muß man jede der 7 Einheiten in 8 Theile theilen, und von jeder Einheit einen ſolchen Theil nehmen, was 7 ſolcher Theile giebt, die man zu den 29 ganzen Einheiten hinzufügt, um den achten Theil von 239, oder den genauen Quotienten der Diviſion von 239 durch 8 zu bilden.

Dieſelbe Ueberlegung läßt ſich auch bei jeder andern Diviſion anſtellen, die einen Reſt übrig läßt. Der Quotient iſt dann immer aus zwei Theilen zuſammen geſetzt, von welchen der eine aus ganzen Einheiten beſteht, der andere aber nur dann gefunden werden kann, wenn man die Theilung der concreten Einheiten des Reſtes, in ſo viel Theile als der Diviſor angiebt, wirklich vornimmt. Man muß ſich alſo die Einheit des Dividendus in ſo viel Theile getheilt vor-

stellen, als der Divisor Einheiten hat, und von diesen Einheiten so viele nehmen, als Einheiten im Reste sind, um den gesuchten Quotienten zu vervollständigen.

§ 52.

Man muß also überhaupt, wenn man Größen die kleiner als die Einheit sind, in Betrachtung nehmen, und sie auf diese Einheit beziehen will, sich vorstellen, daß diese Einheit in eine gewisse Anzahl Theile getheilt sey, von welchen jeder klein genug ist, um eine gewisse Anzahl mal in jenen Größen enthalten zu seyn oder sie zu messen. Die Vorstellung, die man sich auf diese Weise von jenen Größen bildet, enthält also zwei Stücke, nämlich: wie viel mal die Theile, welche jene Größen messen, in der Einheit enthalten sind, und wie viel solcher Theile sie enthalten.

Die Benennungen, welche man für die Brüche festgesetzt hat, entsprechen der eben erwähnten Vorstellungsart und der Weise sie durch Ziffern darzustellen.

Der Bruch, welcher entsteht, wenn man die Einheit
in 2 gleiche Theile theilt, heißt Hälfte
in 3 gleiche Theile, Drittel
in 4 gleiche Theile, Viertel
in 5 gleiche Theile, Fünftel

u. s. f., indem man die Endsylbe tel an die Zahl anhängt, welche anzeigt, in wie viel gleiche Theile man sich die Einheit eingetheilt vorstellt.

Jeder Bruch wird alsdann durch zwei Zahlen ausgedrückt; die erste, welche anzeigt aus wie viel Theilen er gebildet wird, heißt der Zähler, und die zweite, welche angiebt, aus wie viel solcher Theile die Einheit besteht, wird der Nenner genannt, weil von ihr die Benennung des Bruches hergenommen wird. Fünf Sechstel der Einheit sind ein Bruch, dessen Zähler fünf und dessen Nenner sechs ist.

Zähler und Nenner zusammengenommen werden die beiden Glieder des Bruches genannt.

Um Brüche auf eine kurze Art zu schreiben, bedient man sich der Ziffern, indem man den Nenner unter den Zähler setzt und beide durch einen Strich von einander absondert.

Ein Drittel wird durch $\frac{1}{3}$,

fünf Sechstel werden durch $\frac{5}{6}$

bezeichnet.

§ 53.

Aus der Erklärung, die wir von dem Zähler und Nenner gegeben haben, geht hervor, daß ein Bruch vergrößert wird, wenn man seinen Zähler vergrößert, ohne seinen Nenner zu ändern. Denn, da der Nenner angiebt, in wie viel Theile die Einheit getheilt ist, so bestimmt er die Größe dieser Theile, welche also dieselbe bleibt, so lange dieser Nenner sich nicht ändert; aber, indem der Zähler vergrößert wird, wird die Anzahl der Theile, welche der Bruch enthält, und folglich der Bruch selbst vergrößert. So z. B. ist der Bruch $\frac{8}{9}$ größer als der Bruch $\frac{7}{9}$, und der Bruch $\frac{13}{30}$ größer als der Bruch $\frac{11}{30}$.

In Folge derselben Betrachtung leuchtet ein, daß, wenn man den Zähler eines Bruches 2, 3, oder irgend eine Anzahl mal nimmt, ohne seinen Nenner zu ändern, die durch diesen Bruch dargestellte Größe dadurch eine gleiche Anzahl mal genommen, oder mit dieser Zahl multiplicirt wird. Denn man setzt dadurch 2, 3 oder irgend eine Anzahl mal so viel Theile zusammen, als der Bruch vorher enthielt, während diese Theile dieselben bleiben. So ist z. B. der Bruch $\frac{3}{5}$ das Dreifache von $\frac{1}{5}$, und der Bruch $\frac{10}{21}$ das Doppelte von $\frac{5}{21}$.

Man verringert einen Bruch, wenn man seinen Zähler verringert, ohne seinen Nenner zu ändern, weil der dadurch entstehende neue Bruch aus einer geringern Anzahl Theile besteht als der vorige, und diese Theile dieselbe Größe behalten haben. Also wenn man den Zähler eines Bruches durch 2, 3 oder irgend eine Zahl dividirt, ohne seinen Nenner zu ändern, so macht man ihn da-

durch dieſelbe Anzahl mal kleiner, oder dividirt ihn durch dieſe Zahl. Denn der dadurch entſtehende neue Bruch enthält nur 2, 3 oder irgend eine Anzahl mal weniger Theile als der vorige, und dieſe Theile haben dieſelbe Größe behalten. So iſt z. B. der Bruch $\frac{1}{6}$ der dritte Theil von $\frac{1}{2}$, und der Bruch $\frac{5}{11}$ die Hälfte von $\frac{10}{11}$.

§ 54.

Im Gegentheil aber, verringert man einen Bruch, wenn man ſeinen Nenner vergrößert, ohne ſeinen Zähler zu ändern. Denn man denkt ſich alsdann die Einheit in eine größere Anzahl Theile getheilt, von welcher alſo ein jeder kleiner geworden iſt, und da man nur dieſelbe Anzahl nimmt, ſo hat der neue Bruch einen geringern Werth als der vorige. So iſt z. B. der Bruch $\frac{3}{8}$ kleiner als $\frac{3}{4}$, und der Bruch $\frac{4}{13}$ kleiner als $\frac{4}{9}$.

Hieraus folgt, daß wenn man den Nenner eines Bruches mit 2, 3 oder irgend einer Zahl multiplicirt, ohne ſeinen Zähler zu ändern, die durch den Bruch dargeſtellte Größe eine gleiche Anzahl mal kleiner oder durch dieſelbe Zahl dividirt wird. Denn der neue Bruch iſt immer noch aus eben ſo viel Theilen als der vorige zuſammengeſetzt, aber jeder dieſer Theile iſt 2, 3 oder jene Anzahl mal kleiner geworden. Der Bruch $\frac{3}{8}$ iſt die Hälfte von $\frac{3}{4}$, und $\frac{4}{15}$ der dritte Theil von $\frac{4}{5}$.

Man vergrößert einen Bruch, wenn man ſeinen Nenner verringert, ohne ſeinen Zähler zu ändern. Denn man denkt ſich alsdann die Einheit in weniger Theile getheilt, von welchen alſo jeder größer geworden iſt, und da man dieſelbe Anzahl nimmt, ſo hat der neue Bruch einen größern Werth als der vorige.

Alſo, wenn man den Nenner eines Bruches durch 2, 3 oder irgend eine Zahl dividirt, ohne ſeinen Zähler zu ändern, ſo macht man ihn dadurch dieſelbe Anzahl mal ſo groß als er vorher war, oder multiplicirt

ihn mit dieſer Zahl. Denn der neue Bruch beſteht immer noch aus eben ſo viel Theilen als der vorige, aber jeder dieſer Theile iſt 2, 3 oder jene Anzahl mal größer geworden. Demnach iſt der Bruch $\frac{2}{6}$ das Dreifache von $\frac{1}{6}$, und $\frac{4}{6}$ das Vierfache von $\frac{1}{6}$.

Es iſt nun leicht einzuſehen, daß man einen Bruch, durch Weglaſſung ſeines Nenners, mit dieſem Nenner multiplicirt. Läßt man z. B. aus dem Bruche $\frac{1}{3}$ den Nenner, 3, weg, ſo wird er dadurch in 2 Ganze verwandelt, und alſo mit 3 multiplicirt.

§ 55.

Die vorhergehenden Sätze laſſen ſich folgendermaßen zuſammen ſtellen:

Multiplicirt man / Dividirt man } den Zähler, { ſo multiplicirt man / ſo dividirt man } den Bruch.

Multiplicirt man / Dividirt man } den Nenner, { ſo dividirt man / ſo multiplicirt man } den Bruch.

§ 56.

Die nächſte Folgerung, welche man aus dieſer Zuſammenſtellung ziehen kann, beſteht darin, daß die Operationen der Multiplication und Diviſion, welche mit dem Nenner eines Bruches vorgenommen werden, die Wirkung der umgekehrten oder ihnen entgegengeſetzten Operationen auf die durch den Bruch dargeſtellte Größe hervorbringen; und daß ferner der Werth eines Bruches nicht geändert wird, wenn man ſeinen Zähler und Nenner mit einer und derſelben Zahl multiplicirt. Denn wenn man durch Multiplication des Zählers den Bruch 2, 3 oder irgend eine Anzahl mal größer gemacht hat, als er zuvor war, ſo nimmt man dagegen durch die Multiplication des Nenners davon die Hälfte, oder das Drittel u. ſ. w. das heißt man dividirt ihn durch dieſelbe Zahl, mit welcher man ihn multiplicirt hat. So iſt $\frac{1}{6}$ gleich $\frac{3}{18}$, und $\frac{5}{21}$ ſind ſo viel als $\frac{10}{42}$.

§ 57.

Eben so ist einzusehen, daß der Werth eines Bruches nicht geändert wird, wenn man seinen Zähler und Nenner durch eine und dieselbe Zahl dividirt. Denn wenn man durch die Division des Zählers den Bruch 2, 3, u. s. w. mal kleiner gemacht hat als er zuvor war, so nimmt man dagegen durch die Division des Nenners davon das Doppelte, Dreifache, u. s. w., das heißt man multiplicirt ihn mit derselben Zahl, durch welche man ihn dividirt hat. So sind $\frac{3}{4}$ gleich $\frac{1}{2}$, und $\frac{3}{9}$ gleich $\frac{1}{3}$.

§ 58.

Es verhält sich mit Brüchen anders als mit ganzen Zahlen, durch welche eine Größe, so lange man sie auf dieselbe Einheit bezieht, nur auf eine einzige Weise ausgedrückt werden kann, während eine und dieselbe Größe durch einen Bruch auf unendlich viel verschiedene Weisen angegeben werden kann, wenn auch die zum Grunde liegende Einheit nicht geändert wird. Die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ u. s. w.}$$

zum Beispiel, in welchen der Nenner den Zähler zwei mal enthält, drücken, wiewohl unter verschiedenen Gestalten, die Hälfte der Einheit aus, und die Brüche

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ u. s. w.}$$

in welchen der Nenner den Zähler drei mal enthält, stellen sämmtlich den dritten Theil der Einheit dar. Unter allen Formen aber, welche der gegebene Bruch in beiden Beispielen annimmt, zeichnet sich die erste als die einfachste aus, und es ist daher gut, wenn man sie aus jeder andern Form herzuleiten weiß. Hierzu gelangt man dadurch, daß man Zähler und Nenner des Bruches durch eine und dieselbe Zahl dividirt, wodurch, wie wir im vorigen §en gesehen haben, sein Werth nicht geändert wird. Wenn man z. B. Zähler und Nenner des Bruches $\frac{7}{14}$, durch 7 dividirt, so ergiebt sich $\frac{1}{2}$, und wenn man dasselbe bei dem Bruche $\frac{7}{21}$ vornimmt, so erhält man $\frac{1}{3}$.

§ 59.

Durch dieſes Verfahren alſo bringt man einen Bruch auf ſeinen einfachſten Ausdruck *). Es läßt ſich dieſes aber nur bei den Brüchen in Anwendung bringen, in welchen Zähler und Nenner durch eine und dieſelbe Zahl theilbar ſind; denn wenn dies nicht der Fall iſt, ſo iſt der vorgelegte Bruch ſelbſt der einfachſte von allen, welche die durch ihn dargeſtellte Größe ausdrücken. So laſſen ſich die Brüche

$\frac{5}{7}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{15}{16}$,

in welchen Zähler und Nenner ſich nicht durch eine und dieſelbe Zahl dividiren laſſen, oder keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, nicht heben, und man kann die durch ſie dargeſtellte Größen auf keine einfachere Weiſe ausdrücken. Der Beweis hievon bleibt der Algebra vorbehalten.

§ 60.

Um einen Bruch zu heben, müßte man alſo verſuchen, ſeinen Zähler und Nenner durch eine der Zahlen 2, 3, 4, u. ſ. w. zu dividiren. Aber durch ein ungeregeltes Verſuchen würde man nicht immer zu dem einfachſten Ausdrucke des gegebenen Bruches gelangen, wenn man nicht öfters eine große Menge Operationen vollziehen wollte. Wenn z. B. der Bruch $\frac{24}{84}$ gegeben wäre, ſo könnte man zunächſt bemerken, daß Zähler und Nenner ein Vielfaches von 2 iſt. Dividirt man durch dieſe Zahl, ſo ergiebt ſich $\frac{12}{42}$, in welchem Bruche man aber Zähler und Nenner wieder durch 2 dividiren kann, und dann $\frac{6}{21}$ erhält. Obwol dieſer Bruch viel einfacher als der vorgelegte iſt, ſo läßt er ſich doch noch heben, wenn man Zähler und Nenner durch 3 dividirt, wodurch ſich $\frac{2}{7}$ ergiebt.

Erwägt man nun, daß eine Zahl durch 2, dann den

*) Der einfachſte Ausdruck heißt auch die kleinſte Benennung des Bruches. Auch ſagt man der Bruch ſey unter ſeinen kleinſten Nenner oder auf die kleinſten Zahlen gebracht. Das Verfahren ſelbſt nennt man das Heben (auch wohl Aufheben, Verkleinern, Abreviren) des Bruches. Ueberſ.

Quotienten wieder durch 2, und ferner den neuen Quotienten durch 3 dividiren, daſſelbe iſt als jene Zahl gleich durch das Product der Zahlen 2, 2 und 3, oder durch 12 zu dividiren; ſo ſieht man leicht ein, daß ſich die vorher angeführten drei Operationen mit einem Male ausführen laſſen, indem man Zähler und Nenner des gegebenen Bruches, $\frac{24}{84}$, durch 12 dividirt, wodurch man, wie vorher $\frac{2}{7}$ erhält.

Die Zahlen 2, 3, 4 und 12, durch welche die beiden Zahlen 24 und 84 zugleich theilbar ſind, ſind ihre gemeinſchaftlichen Theiler, unter welchen ſich 12 als der größte auszeichnet. Dieſer **größte gemeinſchaftliche Theiler** des Zählers und Nenners iſt es, durch welchen man einen gegebenen Bruch mit einem Male auf ſeine kleinſte Benennung bringt, und man wird hieraus den Nutzen der Aufgabe ermeſſen: **den größten gemeinſchaftlichen Theiler zweier gegebenen Zahlen zu finden.**

§ 61.

Man gelangt zu dem größten gemeinſchaftlichen Theiler zweier Zahlen durch ein Verfahren, das zwar nur in einem ordnungsmäßigen Verſuchen beſteht, das aber dabei den Vorzug hat, daß man durch jeden einzelnen Verſuch, den man innerhalb der ganzen Operation macht, ſeinem Zwecke immer näher kommt. Um dieſes Verfahren deutlich auseinander zu ſetzen, wollen wir es an einem Beiſpiele erklären.

Es ſeyen 637 und 143 die beiden gegebenen Zahlen. Da der größte gemeinſchaftliche Theiler dieſer Zahlen nicht größer ſeyn kann als die kleinere, ſo iſt es rathſam zu verſuchen ob die Zahl 143, welche ein Theiler von ſich ſelbſt iſt, und 1 zum Quotienten giebt, auch ein Diviſor von 637 ſey, in welchem Falle dieſe Zahl, 143, ſelbſt der geſuchte größte gemeinſchaftliche Theiler wäre. Dieſer Fall findet aber in unſerm Beiſpiele nicht Statt, man findet vielmehr einen Quotienten, 4, und einen Reſt, 65.

Nun iſt erſichtlich, daß jeder Theiler, welcher den Zah-

len 637 und 143 gemein ist, auch ein Theiler des Restes, 65, seyn muß, den man bei ihrer Division erhalten hat. Denn die größere Zahl, 637, ist gleich der kleinern, 143, multiplicirt mit 4, sammt dem Reste 65 (§ 50). Da man nun einen ganzzahligen Quotienten ohne Rest erhält, wenn man 637 durch den gemeinschaftlichen Theiler dividirt, so muß man denselben ganzzahligen Quotienten und keinen Rest erhalten, wenn man jeden der beiden Theile, in welche 637 zerlegt ist, durch den gemeinschaftlichen Theiler dividirt und die Resultate addirt. Aber das Product von 143 mit 4 ist nothwendig durch den gemeinschaftlichen Theiler theilbar, welcher ein Factor von 143 ist; es muß also auch der andere Theil, 65, durch diesen Theiler theilbar seyn, weil sonst der Total-Quotient aus einer ganzen Zahl und einem Bruche bestehen würde, und also nicht dem ganzzahligen Quotienten der Division von 637 gleich seyn könnte.

Umgekehrt, jeder Theiler, welcher den beiden Zahlen 65 und 143 gemein ist, ist auch ein Theiler von 637, da diese Zahl aus 4 mal 143 und 65 besteht.

Auf dieselbe Art läßt sich allgemein beweisen, daß jeder gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen auch ein Theiler des Restes ist, den man bei der Division der größern Zahl durch die kleinere erhält; und daß jeder gemeinschaftliche Theiler dieser kleinern Zahl und jenes Restes, auch ein Theiler der größern Zahl seyn muß.

Hieraus sieht man, daß der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 637 und 143 auch der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Zahlen 143 und 65 ist, und daß der der letztern auch der von 637 und 143 seyn muß; da aber 65 durch keine größere Zahl als sie selbst theilbar ist, so hat man zunächst mit dieser den Versuch anzustellen. Dividirt man nun 143 durch 65, so findet man einen Quotienten, 2, und einen Rest, 13. Es ist also 65 nicht der gesuchte Theiler, und durch eine Schlußfolge, welche der ähnlich ist, die wir in

Betreff der Zahlen 637 und 143 und des Restes, 65, gemacht haben, überzeugt man sich, daß der größte gemeinschaftliche Theiler von 143 und 65 auch der größte gemeinschaftliche Theiler von 65 und 13 ist. Da nun der größte gemeinschaftliche Theiler dieser letztern Zahlen 13 nicht übersteigen kann, so muß man versuchen ob 65 durch 13 theilbar sey. Dies ist wirklich der Fall, weil man den Quotienten 5, und keinen Rest findet.

Folglich ist 13 der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler; denn da diese Zahl der größte gemeinschaftliche Theiler von sich selbst und 65 ist, so ist sie es auch von 65 und 143, und weil sie es von diesen beiden Zahlen ist, so muß sie auch der größte gemeinschaftliche Theiler von 143 und 637 seyn.

In der Ausübung pflegt man die auf einander folgenden Divisionen neben einander zu setzen, und die Rechnung folgendermaßen anzuordnen:

637	143	65	13
	4	2	5
65	13	0	

indem man die Quotienten 4, 2 und 5 von den darunter gesetzten Resten absondert.

Die Schlüsse, welche wir bei dem vorigen Beispiele angewendet haben, können bei jeden beliebigen zwei Zahlen in Anwendung gebracht werden, und es ergiebt sich hieraus folgende allgemeine Regel: Um den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden, dividire man die größere durch die kleinere, sodann die kleinere durch den Rest jener ersten Division, dann diesen Rest durch den der zweiten Division, ferner diesen zweiten Rest durch den dritten, d. i. durch den der dritten Division, und fahre so fort den Rest einer jeden Division durch den der folgenden zu dividiren, bis man zu keinem

nem Reſte weiter gelangt. Der letzte Diviſor iſt der geſuchte größte gemeinſchaftliche Theiler.

§ 62.

Hier zwei Beiſpiele dieſer Rechnung.

9024	3760	1504	752
	2	2	2
1504	752	000	

Aus dieſer Rechnung ergiebt ſich, daß 752 der größte gemeinſchaftliche Theiler zwiſchen 9024 und 3760 iſt.

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14 2	1	0	

Aus dieſer letzten Operation ſieht man, daß der größte gemeinſchaftliche Theiler zwiſchen 937 und 47 bloß 1 iſt, das heißt, daß dieſe Zahlen eigentlich keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, weil alle ganze Zahlen, welche es auch ſeyn mögen, durch 1 theilbar ſind.

Es iſt nicht ſchwer ſich zu überzeugen, daß die Regel des vorigen Sen, jedes Mal wenn die vorgelegten Zahlen keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, nothwendig zu dieſem Reſultate führen muß; denn da die Reſte immer kleiner ſind als der Diviſor, ſo werden ſie bei jeder Operation kleiner und kleiner, und es iſt einleuchtend, daß die Diviſionen ſich fortſetzen werden, ſo lange man einen Diviſor hat, der größer als die Einheit iſt.

§ 63.

Nach dieſen Rechnungen laſſen ſich die Brüche $\frac{143}{637}$ und $\frac{9760}{9024}$ ſogleich auf ihre kleinſte Benennungen dadurch zurück führen, daß man die beiden Glieder des erſten durch ihren größten gemeinſchaftlichen Theiler, 13, und die des zweiten

durch ihren größten gemeinſchaftlichen Theiler 752 dividirt. Man erhält auf dieſe Weiſe $\frac{1}{47}$ und $\frac{8}{16}$. Der Bruch $\frac{47}{893}$ hingegen, läßt ſich nicht heben, weil ſeine beiden Glieder keinen andern gemeinſchaftlichen Theiler als die Einheit haben.

§ 64.

Es iſt nicht immer nöthig, die eben gelehrte Art der Aufſuchung des gemeinſchaftlichen Theilers zwiſchen den beiden Gliedern eines vorgelegten Bruches anzuſtellen, denn es giebt Brüche, welchen man ſogleich anſehen kann, durch welche Zahlen ſie ſich heben laſſen.

Jede Zahl, welche ſich mit einer der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 endigt, iſt nothwendig durch 2 theilbar. Denn wenn man irgend eine Zahl durch 2 dividirt, ſo kann bei der Diviſion der Zehner nicht mehr als 1 übrig bleiben; in der letzten Partial-Diviſion iſt alſo der Partial-Dividendus eine der Zahlen 0, 2, 4, 6, 8, wenn bei der vorhergehenden kein Reſt geblieben, oder er iſt eine der Zahlen 10, 12, 14, 16, 18, wenn ſie einen übrig gelaſſen, und alle dieſe Zahlen ſind durch 2 theilbar.

Die durch 2 theilbare Zahlen werden grade Zahlen genannt *).

Jede Zahl, die ſich mit einer Null oder mit einer 5 endigt, iſt durch 5 theilbar. Denn wenn man bis zur Diviſion der Zehner gekommen iſt, kann der Reſt, wenn einer übrig bleibt, nur 1, 2, 3 oder 4 ſeyn, ſo daß, da die letzte Ziffer 0 oder 5 iſt, die Operation mit der Diviſion einer der Zahlen 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 und 45 endigt, welche ſämmtlich durch 5 theilbar ſind.

Die durch eine 1 mit angehängten Nullen ausgedrückten Zahlen 10, 100, 1000, u. ſ. w., können in 9 und 1, 99 und 1, 999 und 1, u. ſ. f. zerlegt werden; und da die Zahlen 9,

*) Die durch 2 nicht theilbaren Zahlen heißen ungrade Zahlen. Ueberſ.

99, 999 u. ſ. w. ſowohl durch 3 als durch 9 theilbar ſind, ſo folgt, daß, wenn man 10, 100, 1000, u. ſ. w. durch 3 oder durch 9 dividirt, der Reſt dieſer Diviſion 1 iſt. Jede Zahl nun, welche, wie 20, 300, 5000, durch eine einzige geltende Ziffer mit angehängten Nullen ausgedrückt wird, läßt ſich in mehrere Zahlen zerlegen, welche durch eine 1 mit angehängten Nullen bezeichnet werden. So iſt 20 gleich 10 und 10, 300 gleich 100 und 100 und 100, 5000 gleich 1000 und 1000 und 1000 und 1000 und 1000. Dividirt man alſo 20, oder 10 und 10, durch 3 oder 9, ſo erhält man den Reſt 1 und 1, oder 2; dividirt man 300, oder 100 und 100 und 100 durch 3 oder 9, ſo iſt der Reſt 1 und 1 und 1 oder 3.

Ueberhaupt, wenn man eine Zahl, welche durch eine geltende Ziffer mit angehängten Nullen bezeichnet wird, auf dieſe Weiſe zerlegt, um ſie durch 3 oder 9 zu dividiren, ſo findet man, daß der Reſt der Diviſion ſo viel mal 1 enthält als die geltende Ziffer Einheiten hat, d. i. der Reſt iſt der geltenden Ziffer gleich. Jede ganze Zahl nun beſteht aus Einern, Zehnern, Hunderten u. ſ. w., ſie iſt alſo aus mehreren Zahlen zuſammen geſetzt, von denen jede eine einzige geltende Ziffer hat, und dividirt man jede dieſer letzteren Zahlen durch 3 oder 9, ſo erhält man die geltenden Ziffern der vorgelegten Zahl zu Reſten; z. B. die Diviſion der Hunderte giebt zum Reſte die Ziffer der Hunderte, die Diviſion der Zehner, die der Zehner, u. ſ. f. Wenn daher die Summe all dieſer Reſte durch 3 oder 9 theilbar iſt, ſo wird die Diviſion der vorgelegten Zahl keinen Reſt geben. Hieraus folgt, daß, wenn die Summe der Ziffern einer Zahl durch 3 oder durch 9 theilbar iſt, ſo iſt auch die Zahl ſelbſt durch 3 oder durch 9 theilbar.

Die Zahlen 423, 4251 und 15342 ſind alſo durch 3 theilbar, weil die Ziffernſumme der erſten Zahl 9, die der zweiten 12 und die der dritten 15 iſt; und die Zahlen 621, 8280 und 934218 ſind durch 9 theilbar, weil die Ziffernſumme der erſten 9, die der zweiten 18 und die der dritten 27 iſt.

Uebrigens ist klar, daß eine Zahl die durch 9 theilbar ist, eben deshalb auch durch 3 theilbar seyn muß, daß hingegen eine durch 3 theilbare Zahl durch 9 nicht theilbar zu seyn braucht.

Es lassen sich über die Theilbarkeit durch andere Zahlen Bemerkungen machen, welche denen ähnlich sind, die wir eben für die Zahlen 2, 3, 5 und 9 aufgestellt haben. Diese Untersuchungen würden uns aber zu sehr von unserm Haupt-Gegenstande entfernen, daher wir nicht dabei verweilen wollen.

Die Zahlen 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, u. s. w., welche nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar sind, heißen Primzahlen. Zwei Zahlen, wie 12 und 35, welche zwar Theiler aber keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, werden Primzahlen unter sich oder auch Primzahlen zu einander genannt *).

Zähler und Nenner eines Bruches, der sich nicht vereinfachen läßt, sind also Primzahlen zu einander.

§ 65.

Die Addition und die Subtraction der Brüche haben keine Schwierigkeit, wenn die zu addirenden oder von einander zu subtrahirenden Brüche denselben Nenner haben. Da sie dann nur aus Theilen von derselben Benennung und folglich auch von derselben Größe bestehen, so kann man sie eben so addiren und subtrahiren als ob es Einheiten wären, wenn man nur dem Resultate die Benennung der Theile giebt, aus welchen es besteht. Denn es ist einleuchtend, daß $\frac{2}{11}$ und $\frac{3}{11}$ zusammen $\frac{5}{11}$ betragen, da 2 Dinge und 3 Dinge einer und derselben Art 5 Dinge der nämlichen Art sind. Eben so leuchtet ein, daß die Differenz zwischen $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ ist, da die Differenz zwischen 3 Dingen und 8 Dingen einer und derselben Art 5 Dinge der nämlichen Art ist.

---

*) In § 154 wird gezeigt werden, wie man es anfangen müsse, um eine Zahl in ihre einfache Factoren oder Primfactoren zu zerlegen.

Verf.

Hieraus erhellet, daß man, um Brüche von derselben Benennung zu addiren oder zu ſubtrahiren, die Summe oder die Differenz ihrer Zähler nehmen, und ihr den gemeinſchaftlichen Nenner jener Brüche geben muß.

§ 66.

Die Addition der Brüche führt öfters zu Reſultaten, welche größer als die Einheit ſind. Wenn man z. B. $\frac{5}{8}$, und $\frac{7}{8}$ addirt, erhält man $\frac{11}{8}$, und da dieſer Ausdruck 11 Theile bezeichnet, von welchen 8 zuſammen genommen die Einheit ausmachen, ſo iſt er gleich der Einheit und drei Achteln derſelben oder $1\frac{3}{8}$.

Jeder Bruch, deſſen Zähler größer als ſein Nenner iſt *), enthält ganze Einheiten, und man findet dieſe Ganze, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt. Der Quotient giebt die Anzahl dieſer ganzen Einheiten, und der Reſt den Zähler des (ächten) Bruches, der ihnen zugeſellt werden muß. Der Ausdruck $\frac{307}{53}$ bezeichnet 307 Theile, von welchen 53 die Einheit ausmachen, und die durch ihn dargeſtellte Größe enthält daher ſo viele Einheiten, ſo viel mal 307 die 53 enthält. Dividirt man, ſo ergiebt ſich 5 als Quotient und 42 als Reſt, und dieſe 42 ſind Drei und funfzigſtel der Einheit, ſo daß man ſtatt $\frac{307}{53}$, ſchreiben kann $5\frac{42}{53}$.

§ 67.

Es iſt zuweilen vortheilhaft einen Ausdruck, wie $5\frac{42}{53}$, der aus einer ganzen Zahl und einem Bruche beſteht **), auf die Form eines unächten Bruches zu bringen, was man den Ausdruck einrichten nennt. Zu dem Ende muß man

*) Man nennt ihn einen unächten Bruch im Gegenſatze mit einem Bruche, deſſen Zähler kleiner als ſein Nenner iſt, und der ein ächter Bruch genannt wird. Ueberſ.

**) Man pflegt einen ſolchen Ausdruck, eine gemiſchte Zahl zu nennen. Ueberſ.

die ganze Zahl mit dem Nenner des daneben stehenden Bruches multipliciren, dessen Zähler zum Producte addiren, und der Summe den Nenner dieses Bruches geben. Denn um z. B. die gemischte Zahl $5\frac{53}{53}$ einzurichten, muß man zunächst die fünf Ganze in Drei- und- funfzigstel verwandeln, was dadurch geschieht, daß man 53 mit 5 multiplicirt, weil jede Einheit drei und funfzig solcher Theile enthält. Das Resultat ist $\frac{265}{53}$, zu welchem die $\frac{53}{53}$ zugezählt, $\frac{307}{53}$ geben.

§ 68.

Wenn die vorgelegten Brüche verschiedene Nenner haben, kann man die Anzahl der Theile des einen Bruches zu der Anzahl der Theile des andern Bruches weder addiren, noch diese Zahlen von einander abziehen, weil die Theile von verschiedener Größe sind. Um diese Schwierigkeit zu heben, nimmt man mit jenen Brüchen eine Verwandlung vor, durch welche sie auf Theile von gleicher Größe gebracht werden, indem man ihnen nämlich einen gemeinschaftlichen Nenner giebt.

Es seyen z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ zwei vorgelegte Brüche. Multiplicirt man die beiden Glieder des ersten Bruches durch den Nenner, 5, des zweiten, so verwandelt er sich in $\frac{10}{15}$; multiplicirt man ferner die beiden Glieder des zweiten durch den Nenner, 3, des ersten, so verwandelt sich dieser zweite Bruch in $\frac{12}{15}$; und man hat auf diese Weise zwei neue Brüche, welche denselben Werth wie die vorigen haben (§ 56). Diese, zur Vergleichung der Werthe zweier Brüche nothwendige, Operation besteht im Grunde nur darin, daß man solche Theile der Einheit auffinde, welche klein genug sind, um in jedem der Theile, aus welchen die gegebenen Brüche gebildet sind, genau eine Anzahl Mal enthalten zu seyn. In dem obigen Beispiele mißt der funfzehnte Theil der Einheit sowohl $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{5}$ dieser Einheit, weil $\frac{1}{3}$ fünf 15tel und $\frac{1}{5}$ drei 15tel enthält. Das bei den Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ befolgte Verfahren findet bei jedem andern Bruche ebenfalls seine Anwendung.

Man muß, im allgemeinen, um irgend zwei Brüche auf einen und denſelben Nenner zu bringen, die beiden Glieder eines jeden Bruches mit dem Nenner des andern multipliciren.

§ 69.

Man bringt beliebig viele Brüche auf einen und denſelben Nenner, wenn man die beiden Glieder eines jeden mit dem Producte der Nenner aller anderen multiplicirt. Denn die neuen Nenner ſind offenbar alle einander gleich, weil jeder das Product aller urſprünglich gegebenen Nenner iſt, und die neuen Brüche haben dieſelben Werthe wie die gegebenen, weil man die beiden Glieder eines jeden bloß mit einer und derſelben Zahl multiplicirt hat (§ 56).

Die vorhergehende Regel führt in jedem Falle zum Zwecke; wenn aber die Nenner der gegebenen Brüche nicht Primzahlen zu einander ſind, ſo giebt es einen gemeinſchaftlichen Nenner, der kleiner iſt als derjenige, den man nach jener Regel erhält. Zu dieſem kleinern gemeinſchaftlichen Nenner gelangt man durch Betrachtungen, welche den im vorigen §en angeſtellten ähnlich ſind. Wenn man z. B. die Brüche

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6} \text{ und } \frac{7}{8}$$

auf gleiche Nenner zu bringen hat, ſo kommt es nur darauf an, die Einheit in ſolche Theile zu theilen, welche in jedem der Theile, aus denen jene Brüche beſtehen, genau enthalten ſind, und es reicht alſo hin die kleinſte Zahl zu finden, welche durch einen jeden der gegebenen Nenner theilbar iſt. Dieſe Zahl muß ſich finden, wenn man nach einander die Vielfachen von 3 durch 4, 6 und 8 dividirt, welches allererſt bei 24 ohne Reſt möglich iſt. Nachdem dieſe Zahl gefunden iſt, hat man nur noch die vorgelegten Brüche in 24tel zu verwandeln. Um dies zu bewerkſtelligen, unterſuche man wie viel mal die Nenner 3, 4, 6 und 8 in 24 enthalten ſind, und multiplicire beide Glieder eines jeden Bruches mit dem erhaltenen Quotienten. Auf

dieſe Weiſe findet man, daß die beiden Glieder von $\frac{3}{8}$ mit 8, die von $\frac{5}{6}$ mit 6, die von $\frac{7}{8}$ mit 4 und diejenigen von $\frac{7}{8}$ mit 3 zu multipliciren ſind, und gelangt demnach zu den Brüchen

$$\frac{18}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24} \text{ und } \frac{21}{24}.$$

In der Algebra werden Mittel angegeben dieſe Operation zu erleichtern *).

§ 70.

Die zur Verwandlung der Brüche vorher gegebene Regel beruht darauf, daß ein Product, welches durch mehrere auf einander folgende Multiplicationen gebildet wird, daſſelbe bleibt, in welcher Ordnung man auch die Multiplicationen vornehmen mag. Dieſe Behauptung, deren Richtigkeit faſt immer als unmittelbar einleuchtend angeſehen wird, bedarf indeſſen eines Beweiſes.

Zuförderſt läßt ſich erweiſen, daß, eine Zahl mit dem Producte zweier andern multipliciren, daſſelbe iſt, als jene Zahl zuerſt mit einer von dieſen beiden Zahlen und das ſich hier-

*) Das Mittel, welches der Verfaſſer hier erwähnt, beſteht darin, daß man, ſtatt das Product aller Nenner zu bilden, oder die Vielfachen eines Nenners durch die übrigen Nenner zu dividiren bis man ein Vielfaches findet, welches durch alle dieſe Nenner theilbar iſt, alle verſchiedene Factoren der Nenner mit einander multiplicirt.

Man pflegt dieſe Art den kleinſten gemeinſchaftlichen Nenner aufzuſuchen folgendermaßen anzuordnen. Es ſeyen z. B. $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$, und $\frac{1}{21}$ die gegebenen Brüche, zu welchen der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner geſucht werden ſoll, ſo ſchreibt man die Nenner in einer Zeile neben einander,

	8.	10.	12.	14.	15.	21.
2.	4.	5.	6.	7.	15.	21.
2.	2.	5.	3.	7.	15.	21.
3.	2.	5.	1.	7.	5.	7.
5.	2.	1.	1.	7.	1.	7.
7.	2.	1.	1.	1.	1.	1.

ſucht eine Zahl, 2, durch welche ſich zwei oder mehrere dieſer Nenner, 8, 10, 12, dividiren laſſen, verrichtet dieſe Diviſionen, und ſchreibt die Quotienten und die Zahlen, welche ſich nicht durch dieſen Theiler dividiren laſſen, in einer zweiten Zeile neben einander, den Diviſor, 2, aber davor.

aus ergebende Product mit der andern multipliciren. Z. B. ſtatt 3 mit 35, dem Producte von 5 und 7, zu multipliciren, kann man 3 mit 5 und ſodann das Product dieſer Zahlen mit 7 multipliciren. Dieſer Satz leuchtet ein, wenn man an die Stelle der Zahl 3 die Einheit ſetzt; denn 1 mit 5 multiplicirt giebt 5, und das Product von 5 und 7 giebt eben ſowohl 35 als das Product von 1 und 35; da aber 3, oder jede andere Zahl, aus Einheiten zuſammengeſetzt iſt, ſo wird mit ihr nichts vorgenommen als was mit jeder der Einheiten, aus welchen ſie beſteht, vorgenommen wird, das heißt die Producte der Zahlen 3, 5 und 7, welche man auf die eine oder die andere Weiſe erhält, ſind in beiden Fällen das Dreifache des Reſultates, welches die Einheit mit 5 und 7 multiplicirt giebt, und alſo nothwendig einander gleich. Es läßt ſich eben ſo beweiſen, daß wenn 3 mit dem Producte der Zahlen 5, 7 und 9 zu multipliciren iſt, dies darauf zurückgeführt werden kann, 3 mit 5, ſodann das entſtandene Product mit

---

Mit der zweiten Zeile verfährt man wie mit der erſten, wodurch man eine dritte Zeile erhält, die man eben ſo behandelt, und ſo fährt man fort bis man zu einer Zeile gelangt, in welcher ſich nicht mehr zwei Zahlen finden, die einen gemeinſchaftlichen Theiler haben. Alsdann multiplicirt man alle Zahlen der letzten Zeile und alle angewandte Diviſoren mit einander, und das Product, 840, iſt der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner.

Daß dieſes Product wirklich durch all die gegebenen Nenner theilbar iſt, läßt ſich leicht einſehen; wenn man erwägt, daß z. B. der Nenner 8 in der zweiten Zeile durch 2, und ſein Quotient, 4, in der dritten Zeile wieder durch 2 dividirt iſt, wovon der neue Quotient in die letzte Zeile heruntergerückt iſt, ſo daß ſich ſämmtliche drei Factoren, in welche 8 zerlegt worden, in der Columne der Diviſoren und in der letzten Zeile finden; ferner, daß der Nenner 10 in der zweiten Zeile durch 2, und ſein Quotient in der fünften Zeile durch 5 dividirt iſt, wovon der neue Quotient in die letzte Zeile heruntergerückt iſt, ſo daß ſich ſämmtliche drei Factoren, 2, 5 und 1, in welche 10 zerlegt worden, in der Columne der Diviſoren und in der letzten Zeile finden; u. ſ. w. Das Product der in der letzten Zeile und in der Columne der Diviſoren enthaltenen Zahlen enthält demnach alle Factoren eines jeden Nenners, und folglich jeden einzelnen Nenner ſelbſt.

Ueberſ.

7 und dieſes letzte Product mit 9 zu multipliciren, u. ſ. f. wie groß auch die Anzahl der Factoren ſeyn mag.

Um mehrere auf einander folgende Multiplicationen kurz anzudeuten, wie die der Zahlen 3, 5 und 7, wollen wir

3 mit 5 mit 7

ſchreiben.

In dem Producte von 3 mit 5 kann man die Ordnung der Factoren verändern (§ 27) und man wird noch immer daſſelbe Product haben, woraus unmittelbar folgt, daß 5 mit 3 mit 7 daſſelbe iſt, als 3 mit 5 mit 7. Es läßt ſich aber auch in dem Producte 5 mit 3 mit 7 die Ordnung der Factoren 3 und 7 ändern, weil dieſes Product daſſelbe iſt als 5 multiplicirt mit dem Producte der Zahlen 3 und 7; es iſt alſo noch immer 5 mit 7 mit 3 daſſelbe Product als die vorigen.

Aus der Zuſammenſtellung dieſer drei Anordnungen

3 mit 5 mit 7
5 mit 3 mit 7
5 mit 7 mit 3

ſieht man, daß der Factor 3 nach einander der erſte, der zweite und der dritte iſt, und daß es eben ſo mit jedem der übrigen Factoren ſeyn kann; und dieſes Beiſpiel, in welchem der beſondere Werth der Factoren gar nicht berückſichtigt worden, beweiſt, daß ein Product von drei Factoren ſich nicht ändert, in welcher Ordnung die Multiplicationen auch vorgenommen werden mögen.

Wenn man ein Product von vier Factoren hat, wie 3 mit 5 mit 7 mit 9, ſo kann man, nach dem eben Geſagten, die drei erſten oder die drei letzten, beliebig anordnen, und dadurch jeden dieſer Factoren in jede Stelle bringen. In einer dieſer neuen Anordnungen, z. B. in 5 mit 7 mit 3 mit 9 läßt ſich wieder die Ordnung der beiden letzten Factoren umkehren, wodurch ſich 5 mit 7 mit 9 mit 3 ergiebt, und alſo 3 in die letzte Stelle gebracht iſt. Dieſe Ueberlegung läßt ſich bei jeder beliebigen Anzahl Factoren anſtellen.

§ 71.

Die Addition und Subtraction der Brüche wird wie im § 65 bewerkſtelligt, wenn man ſie zuvor auf einen und denſelben Nenner gebracht hat *).

§ 72.

Wenn gemiſchte Zahlen gegeben ſind, ſo muß man zuförderſt mit den Brüchen operiren. Um z. B. $3\frac{3}{7}$ und $5\frac{4}{9}$ zu addiren, fange man damit an die Brüche $\frac{3}{7}$ und $\frac{4}{9}$ auf gleiche Benennung zu bringen, wodurch ſie in $\frac{27}{63}$ und $\frac{28}{63}$ verwandelt werden; ſodann füge man ihre Summe zu der Summe der ganzen Zahlen 3 und 5, und man erhält als Total-Summe $8\frac{55}{63}$.

Die Subtraction läßt ſich eben ſo verrichten, wenn der Bruch in der abzuziehenden Zahl der kleinere von beiden iſt. Im entgegengeſetzten Falle muß man von der ganzen Zahl, welche vor dem kleinern Bruche ſteht, eine Einheit borgen

---

*) Die Addition der Brüche pflegt man folgendermaßen anzuordnen. Man ſchreibt die gegebenen Brüche, die z. B. $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{11}{16}$, und $\frac{13}{21}$ ſeyn mögen, in einer Columne unter einander,

	840	
$\frac{7}{8}$	105	735
$\frac{3}{10}$	84	252
$\frac{5}{12}$	70	350
$\frac{1}{14}$	60	60
$\frac{11}{16}$	56	616
$\frac{13}{21}$	40	520
		$\frac{2533}{840}$, oder $3\frac{13}{840}$.

zieht neben dieſer Columne einen Strich, und ſetzt den, nach § 69 gefundenen, gemeinſchaftlichen Haupt-Nenner darüber. Dieſen Haupt-Nenner dividirt man durch den Nenner eines jeden Bruches, und ſchreibt den Quotienten neben dieſen Bruch hin. Sodann multiplicirt man den Zähler eines jeden Bruches mit dem daneben geſetzten Quotienten, und ſchreibt die Producte in eine dritte Columne, welche nun die Zähler aller auf gleiche Benennung gebrachten Brüche enthält. Man addirt dann die in dieſer Columne enthaltenen Zahlen, und giebt der Summe den gemeinſchaftlichen Nenner, wodurch man $\frac{2533}{840}$ oder (§. 66) $3\frac{13}{840}$ für die Summe der gegebenen Brüche erhält. Ueberſ.

und ſie zu dem kleinern Bruche hinzufügen, damit die Subtraction der Brüche möglich wird. Wenn man z. B. $\frac{4}{5}$ von $3\frac{1}{4}$ zu ſubtrahiren hat, ſo verwandeln ſich die Brüche, wenn man ſie auf gleiche Benennung bringt, in $\frac{16}{20}$ und $\frac{5}{20}$, und man ſieht nun, daß der erſte Bruch nicht von dem zweiten ſubtrahirt werden kann; wenn man aber 1 oder $\frac{20}{20}$ von den 3 Ganzen wegnimmt und ſie zu den $\frac{5}{20}$ hinzufügt, ſo verwandeln ſich die $3\frac{1}{4}$ oder $3\frac{5}{20}$ in $2\frac{25}{20}$, von welchen man die $\frac{16}{20}$ wegnimmt und $2\frac{9}{20}$ zum Reſte erhält.

§ 73.

Wir nehmen jetzt die in § 55 gemachte Zuſammenſtellung:

Multiplicirt man / Dividirt man } den Zähler, { ſo multiplicirt man / ſo dividirt man } den Bruch.

Multiplicirt man / Dividirt man } den Nenner, { ſo dividirt man / ſo multiplicirt man } den Bruch.

wieder vor, um daraus neue Folgerungen zu ziehen.

Die bloße Anſicht dieſer Zuſammenſtellung lehrt, daß man einen Bruch auf zwei verſchiedene Arten multipliciren kann, nämlich dadurch, daß man ſeinen Zähler multiplicirt oder dadurch, daß man ſeinen Nenner dividirt, und ſie lehrt ferner, daß man ihn auch auf zweierlei Arten dividiren kann, nämlich dadurch, daß man ſeinen Zähler dividirt, oder dadurch, daß man ſeinen Nenner multiplicirt. Hieraus folgt, daß die Multiplication allein hinreicht einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren oder zu dividiren, weil man nur im erſten Falle den Zähler, und im zweiten den Nenner mit dieſer Zahl zu multipliciren braucht. So geben $\frac{3}{16}$ mit 7 multiplicirt $\frac{21}{16}$, und $\frac{4}{9}$ durch 3 dividirt $\frac{4}{27}$.

§ 74.

Wenn der Multiplicator, wie im vorigen §, eine ganze Zahl iſt, zeigt er, eben ſo wie im § 22, an, wie viel mal der Multiplicandus genommen werden ſoll; wenn man aber z. B. ſagt: den 5ten Theil einer Zahl nehmen, heiße dieſe Zahl mit $\frac{1}{5}$ multipliciren, ſo hat das Wort multipliciren nicht mehr

dieſelbe Bedeutung als vorher, weil es alsdann auf ein Reſultat deutet, das fünf mal kleiner iſt als der Multiplicandus. Indeſſen läßt ſich eine Erklärung des Wortes geben, welche beide Bedeutungen umfaßt, nämlich: Eine Zahl mit einer andern multipliciren heißt aus der erſten Zahl eine dritte auf dieſelbe Weiſe bilden, wie die zweite aus der Einheit gebildet iſt. Denn wenn mit 2, mit 3 u. ſ. w. multiplicirt wird, ſo beſteht das Product aus den 2-fachen Multiplicandus, aus den 3-fachen Multiplicandus u. ſ. w., eben ſo wie der Multiplicator aus 2, 3 u. ſ. w. Einheiten zuſammengeſetzt iſt; und eine Zahl z. B. mit dem Bruche $\frac{1}{5}$ multipliciren heißt den fünften Theil dieſer Zahl nehmen, weil der Multiplicator $\frac{1}{5}$, da er der fünfte Theil der Einheit iſt, angiebt, daß das Product der fünfte Theil der Einheit ſeyn ſoll *).

Eben ſo heißt eine Zahl mit $\frac{2}{5}$ multipliciren nichts anderes, als von dem Multiplicandus einen Theil nehmen, welcher vier Fünftel deſſelben oder gleich vier mal dem fünften Theil dieſes Multiplicandus iſt.

Hieraus ſieht man, daß das Wort multipliciren, wenn es auf Brüche bezogen wird, nicht immer den Begriff der Vermehrung mit ſich führt, wie dies der Fall iſt, wenn es auf ganze Zahlen bezogen wird. Jedes Mal wenn der Multiplicator kleiner als die Einheit iſt, iſt auch das Product kleiner als der Multiplicandus, dem es nur dann gleich iſt, wenn der Multiplicator 1 iſt.

§ 75.

Weil die Multiplication mit einem Bruche darin beſteht, von dem Multiplicandus, welches er auch

*) Man wird auf dieſe Erklärung der Multiplication, unter andern, durch eine Aufgabe geführt, welche häufig vorkommt. Dies iſt die, in welcher der Preis irgend einer Menge von Dingen einerlei Art geſucht wird, während nur der Preis der Einheit dieſer Dinge bekannt iſt. Die Aufgabe bleibt offenbar dieſelbe es mag die Menge, deren Preis geſucht wird, größer oder kleiner als die Einheit ſeyn. Verf.

seyn mag, diejenigen Theile zu nehmen, welche der gebrochene Multiplicator angiebt, so ist diese Operation aus zwei anderen zusammengesetzt, nämlich aus einer Division und einer Multiplication, in welchen Divisor und Multiplicator ganze Zahlen sind.

Denn wenn man z. B. $\frac{4}{5}$ einer Zahl zu nehmen hat, muß man sie durch 5 dividiren um den fünften Theil zu finden, und dieses Fünftel mit 4 multipliciren um 4 Fünftel zu erhalten. Ueberhaupt sieht man, daß der Multiplicandus durch den Nenner des Multiplicators dividirt, und das Resultat mit dem Zähler desselben multiplicirt werden muß. Wenn der Multiplicandus eine durch 5 theilbare ganze Zahl, z. B. 35 ist, so ist der fünfte Theil 7, und dieses Resultat mit 4 multiplicirt giebt 28 als die $\frac{4}{5}$ von 35, oder als das Product von 35 mit $\frac{4}{5}$. Wenn der Multiplicandus zwar eine ganze Zahl aber nicht durch 5 theilbar, z. B. 32, ist, so giebt die Division durch 5 den Quotienten $6\frac{2}{5}$. Dieser Quotient vier mal genommen beträgt $24\frac{8}{5}$, welche Zahl in $25\frac{3}{5}$ verwandelt werden kann, und dies ist der Werth der $\frac{4}{5}$ von 32. Man würde die Verwandlung von $24\frac{8}{5}$ in $25\frac{3}{5}$ erspart haben, wenn man damit angefangen hätte 32 mit dem Zähler 4 zu multipliciren; hätte man dann das Product 128 durch den Nenner 5 dividirt, so würde man sogleich $25\frac{3}{5}$ erhalten haben.

§ 76.

Wir schreiten jetzt zu der Multiplication eines Bruches mit einem Bruche.

Wir wollen annehmen, daß man z. B. $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ zu multipliciren habe. Zufolge des vorigen §en ist die Operation darauf zurückgeführt, $\frac{2}{3}$ durch 5 zu dividiren und sodann das Resultat mit 4 zu multipliciren; und zufolge des § 73 wird das erste verrichtet, wenn man den Nenner, 3, des Multiplicandus mit 5, und das zweite, wenn man den Zähler, 2, des Multiplicandus mit 4 multiplicirt. Mit jedem andern Bei-

ſpiele wird es eben ſo ſeyn, und wir ſchließen daher, daß man, um das Product zweier Brüche zu finden, den Zähler des einen mit dem Zähler des andern multipliciren, und unter dieſes Product das der beiden Nenner ſetzen muß.

§ 77.

Wenn man gemiſchte Zahlen mit einander zu multipliciren hat, wie z. B. $3\frac{5}{7}$ mit $4\frac{4}{9}$, ſo kann man, um auf eine einfache Weiſe das Product zu finden, beide Factoren, nach dem im § 67 angegebenen Verfahren, in unächte Brüche verwandeln. Man erhält alsdann $\frac{26}{7}$ und $\frac{40}{9}$ und zum Producte (nach dem vorigen §en) $\frac{1040}{63}$ oder wenn man die Ganzen herausnimmt $18\frac{10}{63}$ (§. 66).

§ 78.

Man nennt zuweilen das Product mehrerer Brüche einen Bruchs-Bruch, ſagt alsdann ſtatt $\frac{2}{5}$ mal $\frac{4}{6}$, $\frac{2}{5}$ von $\frac{4}{6}$, und dieſer letztere Ausdruck ſoll die $\frac{2}{5}$ der Größe bezeichnen, welche durch $\frac{4}{6}$ der urſprünglich zum Grunde liegenden Einheit vorſtellig gemacht und jetzt als Einheit betrachtet wird. Man reducirt dieſe beiden Brüche durch Multiplication (§ 76) auf einen einzigen, und das Reſultat, $\frac{8}{15}$, drückt den, auf die urſprünglich zum Grunde liegende Einheit bezogenen, Werth des Bruchs-Bruches aus, das heißt: $\frac{2}{5}$ der Größe, welche durch $\frac{4}{6}$ der Einheit vorſtellig gemacht wird, ſind $\frac{8}{15}$ dieſer Einheit gleich. Wenn man $\frac{7}{9}$ dieſes Reſultates nimmt, ſo iſt dies eben ſo viel, als wenn man $\frac{7}{9}$ von $\frac{3}{3}$ von $\frac{4}{5}$ nähme, und indem man dieſe Brüche auf einen einzigen reducirt, hat man $\frac{56}{135}$ als den, auf die urſprünglich zum Grunde liegende Einheit bezogenen, Werth der geſuchten Größe.

§ 79.

Der Ausdruck eine Zahl iſt in einer andern enthalten paßt ſtreng genommen eben ſo wenig auf die verſchiedenen Fälle der Diviſion als der Ausdruck eine Zahl ſo und ſo viel mal nehmen auf alle Fälle der Multiplication paßt.

Denn man kann im eigentlichen Sinne des Wortes nicht sagen der Dividendus enthalte den Divisor, wenn jener kleiner ist als dieser. Indessen drückt man sich auch in diesem Falle so aus, aber bloß nach Analogie und durch Erweiterung des Begriffes.

Um den Begriff der Division zu verallgemeinern, muß man den Dividendus als eine Größe betrachten, die eben so aus dem Quotienten gebildet ist, wie der Divisor aus der Einheit, weil der Divisor und der Quotient die beiden Factoren des Dividendus sind (§ 36). Diese Betrachtungsweise paßt auf alle Fälle, welche bei der Division vorkommen können. Wenn z. B. der Divisor 5 ist, so ist der Dividendus 5 mal so groß als der Quotient, und folglich ist dieser der fünfte Theil des Dividendus. Wenn aber der Divisor ein Bruch, z. B. $\frac{1}{2}$, ist, so kann der Dividendus nur die Hälfte des Quotienten seyn, und dieser letztere ist also das Doppelte des Dividendus.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn der Divisor kleiner als die Einheit, der Quotient größer als der Dividendus ist, weil dieser Divisor in dem Dividendus eine größere Anzahl mal enthalten seyn muß als es die Einheit ist, welche letztere als Divisor genommen in jedem Falle einen Quotienten giebt, der dem Dividendus gleich ist.

Die Erklärung, welche wir eben gegeben haben, führt leicht darauf, wie man zu verfahren habe, wenn der Divisor ein Bruch ist. Wir wollen $\frac{4}{5}$ zum Beispiel nehmen. Hier darf der Dividendus nur $\frac{4}{5}$ des Quotienten seyn, und da $\frac{1}{5}$ gleich $\frac{1}{4}$ von $\frac{4}{5}$ ist, so wird man $\frac{1}{5}$ des Quotienten erhalten, wenn man den vierten Theil des Dividendus nimmt, oder ihn durch 4 dividirt. Da man nun $\frac{1}{5}$ des Quotienten kennt, so braucht man dieses nur 5 mal zu nehmen, oder es mit 5 zu multipliciren, um den Quotienten zu erhalten. Bei diesem Verfahren dividirt man den Dividendus durch 4, und multiplicirt das Resultat mit 5; es ist also dasselbe als ob man $\frac{1}{4}$

des

des Dividendus genommen (§ 75), oder als ob man den Dividendus mit $\frac{4}{3}$ multiplicirt hätte, welcher letztere Bruch aus dem dividirenden Bruche hervorgeht, wenn man seine beiden Glieder verwechselt, oder wie man sich auszudrücken pflegt, ihn umkehrt.

Dieses Beispiel zeigt, daß man im allgemeinen, um irgend eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, diese Zahl mit dem umgekehrten Bruche multipliciren muß. Es sey z. B. 9 durch $\frac{3}{4}$ zu dividiren, so wird dies bewirkt, wenn man 9 mit $\frac{4}{3}$ multiplicirt, wodurch man $\frac{36}{3}$ oder 12 findet. Eben so dividirt man 13 durch $\frac{5}{6}$ indem man 13 mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, woraus sich $\frac{78}{5}$ ergeben, und der Quotient ist also, wenn man (nach § 66) die Ganzen heraus nimmt, $18\frac{3}{5}$.

§ 80.

Wenn der Dividendus ein Bruch ist, so kommt die Operation darauf zurück, den zu dividirenden Bruch mit dem umgekehrten dividirenden Bruche zu multipliciren (§ 76). Wenn z. B. $\frac{7}{8}$ durch $\frac{3}{5}$ zu dividiren ist, so multiplicirt man $\frac{7}{8}$ mit $\frac{5}{3}$ und erhält $\frac{35}{24}$.

Es ist klar, daß die eben angegebene Regel auch folgendermaßen ausgedrückt werden kann. Um einen Bruch durch einen andern zu dividiren, multiplicire man den Zähler des ersten mit dem Nenner des andern, und den Nenner des ersten mit dem Zähler des andern.

Wenn gemischte Zahlen durch einander zu dividiren sind, so verwandelt man sie in unächte Brüche (§ 67), und verfährt mit diesen nach der obigen Regel.

§ 81.

Jede Division läßt sich vermittelst eines Bruches angeben, sie mag in ganzen Zahlen ausführbar seyn oder nicht. Z. B. $\frac{36}{3}$ drücken eben sowohl den Quotienten von 36 durch 3 aus, als 12; denn da $\frac{1}{3}$ drei mal in der Einheit enthalten ist, so sind $\frac{36}{3}$ drei mal in 36 Ganzen enthalten, wie es der Quotient von 36 durch 3 auch seyn muß.

§ 82.

Man wird ohne Zweifel die Bemerkung machen, daß die Multiplication und Division der Brüche ſich unmittelbar nach den in § 55 zuſammengeſtellten Sätzen bewerkſtelligen laſſen, während die Addition und Subtraction der Brüche im allgemeinen eine vorgängige Umwandlung derſelben erheiſcht. Dies liegt daran, daß die Brüche von der Diviſion herrühren, welche mit der Multiplication nahe verwandt iſt. Man wird in der Folge oft Gelegenheit haben ſich zu überzeugen, daß jede arithmetiſche Operation deſto leichter iſt, je mehr ſie ſich dem Urſprunge der Größen nähert, mit welchen operirt werden ſoll.

Von den Decimalbrüchen.

§ 83.

Obgleich man mit den Brüchen die vier Fundamental-Operationen der Arithmetik nach den oben gegebenen Regeln in allen Fällen vollziehen kann, ſo mußte man doch bald einſehen, daß die Rechnung mit Brüchen viel bequemer ſeyn würde, wenn man die verſchiedenen Unterabtheilungen der Einheit, durch welche Größen, die kleiner als dieſe Einheit ſind, gemeſſen werden, nach einem und demſelben Geſetze der Abnahme angenommen hätte, weil alsdann die Verwandlung der verſchiedenen Brüche in einander ſehr leicht iſt. Man hat dieſes Geſetz mit der Grundlage unſeres Numerations-Syſtems übereinſtimmend angenommen, und dadurch der Bruch-Rechnung den höchſten Grad der Einfachheit verſchafft, den ſie erreichen kann, und zwar auf folgende Weiſe.

Man hat im § 4 geſehen, daß jede Einheit irgend einer Ordnung, welche in einer Zahl vorkommt, aus zehn Einheiten der vorhergehenden Ordnung beſteht, grade ſo wie ein Zehner aus Einern. Nun hindert nichts, daß man dieſen

Einer betrachte als zehn gleiche Theile enthaltend, von welchen jeder ein Zehntel,

das Zehntel als zehn gleiche Theile enthaltend, von welchen jeder ein Hundertel,

das Hundertel als zehn gleiche Theile enthaltend, von welchen jeder ein Tauſendtel iſt, u. ſ. f.

Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo bildet man immer kleinere und kleinere Größen und zwar ſo, daß man dadurch zu Größen kommt, die kleiner als eine gegebene Größe ſind, wie gering dieſe letztere auch ſeyn mag *).

Dieſe Brüche, welche man Decimalbrüche nennt, weil ſie aus zehn und zehn mal kleineren Theilen der Einheit beſtehen, laſſen ſich auf dieſelbe Weiſe in einander verwandeln, wie ſich die Zehner, Hunderte, Tauſende u. ſ. w. in Einer verwandeln laſſen. Denn

die Einheit hat 10 Zehntel
ein Zehntel hat 10 Hundertel
ein Hundertel hat 10 Tauſendtel u. ſ. f.

und hieraus ergiebt ſich, daß ein Zehntel 10 mal 10 Tauſendtel oder 100 Tauſendtel hat, u. ſ. f.

Zum Beiſpiel, 2 Zehntel, 3 Hundertel und 4 Tauſendtel ſind ſo viel 234 Tauſendtel, eben ſo wie 2 Hunderte, 3 Zehner und 4 Einer, 234 Einer ſind; und ſo wird es in

---

*) Im Original lautet die obige Stelle wie folgt:

„Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo bildet man ſo kleine Größen als man will, vermittelſt welcher man folglich jede Größe meſſen kann, wie klein ſie auch ſeyn mag.“

Dies iſt aber ſtreng genommen nicht richtig, denn die ſo gebildeten Zahlengrößen nehmen abſatz- oder ſprungweiſe ab, ſo daß man zwar Zahlen dadurch erhält, die kleiner ſind als eine noch ſo kleine gegebene Größe wäre, die aber deshalb noch nicht jede Größe zu meſſen brauchen, und die auch in der That nicht jede Größe genau meſſen.

Wir werden bei Gelegenheit des § 97 auf dieſen Gegenſtand zurückkommen. Ueberſ.

jedem andern Falle seyn, weil die Unterabtheilungen der Einheit den verschiedenen Ordnungen der Einheiten ähnlich sind.

§ 84.

Demnach kann man Decimalbrüche auf dieselbe Weise mit Ziffern schreiben wie man ganze Zahlen schreibt. Denn der Uebereinkunft gemäß, zufolge welcher jede Ziffer einen zehnmal kleinern Werth hat, als sie in der Stelle der Ziffer haben würde, der sie zur rechten steht, darf man nur die Zehntel auf die rechte Seite der Einer, die Hundertel auf die rechte Seite der Zehner setzen u. s. f. Um aber zu verhindern, daß man die Ziffern, welche die Decimaltheile ausdrükken, mit denjenigen, welche die ganzen Einheiten bedeuten, verwechsele, setzt man ein Komma auf die rechte Seite der Einer. Um z. B. 34 Einheiten und 27 Hundertel auszudrücken, schreibt man 34,27. Wenn keine ganze Einheiten vorhanden sind, füllt man ihre Stelle durch eine Null aus, und thut dasselbe für alle Decimaltheile, welche zwischen den im Bruche genannten Decimaltheilen fehlen. So bezeichnet man

1 Zehntel und 9 Hundertel, oder 19 Hundertel, durch 0,19;
3 Zehntel und 4 Tausendtel, oder 304 Tausendtel, durch 0,304;
3 Tausendtel durch 0,003.

§ 85.

Wenn man die obigen Decimalbrüche mit den Brüchen $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{1000}$ und $\frac{3}{1000}$ vergleicht, welche letztern man nach der allgemeinen Art die Brüche zu schreiben, erhalten hätte; so sieht man, daß man, um einen, in Form eines gewöhnlichen Bruches geschriebenen, Decimalbruch nach Art einer ganzen Zahl zu schreiben, den Zähler dieses Bruches wie er ist und so hinsetzen muß, daß nach dem Komma eben so viele Ziffern stehen, als Nullen im Nenner nach der Eins folgen. Und umgekehrt, um einen Decimalbruch, welcher nach Art einer ganzen Zahl geschrieben ist, auf die Form eines gewöhnlichen Bruches zu bringen, muß man den Ziffern, aus denen er

besteht, die Eins mit so viel angehängten Nullen zum Nenner geben, als Ziffern nach dem Komma folgen. Auf diese Weise verwandelt man die Brüche 0,56 und 0,036 in $\frac{56}{100}$ und $\frac{36}{1000}$.

§ 86.

Eine mit Ziffern geschriebene Zahl, welche Decimaltheile enthält, wird so gelesen, daß man zuerst die Zahl ausspricht, welche durch die auf der linken Seite des Kommas befindlichen Ziffern ausgedrückt ist, sodann diejenige, welche die auf der rechten Seite des Kommas stehenden bezeichnen, und dieser letztern die Benennung beilegt, welche die durch sie ausgedrückte Theile haben: Demnach wird

die Zahl 26,736 ausgesprochen: 26 Ganze und 736 Tausendtel,
die Zahl 0,0673 ausgesprochen: 673 Zehntausendtel,
die Zahl 0,0000673 ausgesprochen: 673 Zehnmilliontel.

§ 87.

Da die Decimalziffern ihren Werth nur von der Stelle bekommen, in welcher sie in Hinsicht auf das Komma stehen, so ist es einerlei ob man auf ihrer rechten Seite noch eine beliebige Anzahl Nullen hinschreibt oder nicht. Z. B. 0,5 ist dasselbe wie 0,50, und 0,784 dasselbe wie 0,78400; denn in dem ersten Beispiele ist die Zahl, welche den Decimalbruch ausdrückt, zwar zehn mal größer geworden, aber die Theile sind zu Hunderteln, und also zehn mal kleiner geworden als sie vorher waren; im zweiten Beispiele hat man die Zahl, welche den Decimalbruch ausdrückt hundert mal größer gemacht, aber die Theile sind zu Hunderttausendteln, und also hundert mal kleiner geworden als sie vorher waren. Diese Verwandlung ist also die nämliche, welche man mit den gewöhnlichen Brüchen vornimmt, wenn man ihre beiden Glieder mit einer und derselben Zahl multiplicirt. Läßt man hingegen Nullen weg, die auf der rechten Seite des Decimal-

bruches ſtehen, ſo iſt dies das nämliche, als wenn man Zähler und Nenner mit einer und derſelben Zahl dividirt.

§ 88.

Die Addition der Decimalbrüche bedarf keiner andern Vorſchriften als die der ganzen Zahlen, weil die, von der linken nach der rechten Seite hin auf einander folgenden, Decimaltheile auf dieſelbe Weiſe aus einander zuſammengeſetzt ſind, wie die verſchiedenen Ordnungen der ganzen Einheiten.

Es ſeyen z. B. die Brüche 0,56; 0,003 und 0,958 zu addiren. Setzt man ſie wie folgt unter einander

0,56
0,003
0,958
Summe . . . 1,521

ſo findet man nach der Regel des § 12, daß ihre Summe 1,521 iſt.

Es ſeyen ferner die Zahlen 19,35; 0,3; 84,5 und 110,02, welche auch Ganze enthalten, zu addiren. Man ſchreibt die Zahlen wie folgt unter einander

19,35
0,3
84,5
110,02
Summe . . . 214,17

und findet auf dieſelbe Weiſe, daß ihre Summe 214,17 iſt.

Ueberhaupt wird die Addition der Zahlen, welche Decimaltheile enthalten, wie die von ganzen Zahlen verrichtet, wenn man darauf achtet in der Summe das Komma in derſelben Columne zu ſetzen, in welcher ſich die Kommata der zu addirenden Zahlen befinden.

§ 89.

Die für die Subtraction ganzer Zahlen gegebenen Regeln paſſen auch, wie man ſogleich ſehen wird, auf Zahlen, welche Decimaltheile enthalten. Es ſey z. B. 0,3697 von 0,62 zu ſubtrahiren, ſo erinnere man ſich, daß die zweite Zahl,

welche nur Hundertel enthält, während die erste aus Zehntausendteln besteht, sogleich auch in Zehntausendteln verwandelt werden kann, wenn man ihr zwei Nullen auf der rechten Seite anhängt (§ 87), wodurch sie in 0,6200 verändert wird. Man ordne nun die Operation wie folgt an

0,6200
0,3697
Differenz . . . 0,2503

und man wird nach der Regel des § 17 eine Differenz von 0,2503 finden.

Es sey ferner die Zahl 7,364 von 9,1457 zu subtrahiren. Wird die Operation wie folgt angeordnet,

9,1457
7,3640
Differenz . . . 1,7817

so findet man die eben angegebene Differenz. Man hätte hier auch unterlassen können der abzuziehenden Zahl eine Null anzuhängen, wenn man ihre Ziffern unter diejenigen gesetzt hätte, welche in der andern Zahl Einheiten derselben Ordnung oder Theile gleicher Benennung bedeuten.

Es wird überhaupt die Subtraction der Zahlen, welche Decimaltheile enthalten, wie die der ganzen Zahlen verrichtet, wenn man vorher die Anzahl der Decimalziffern in den beiden gegebenen Zahlen dadurch einander gleich macht, daß man an der rechten Seite derjenigen, welche die wenigsten Decimalziffern hat, so viele Nullen als erforderlich sind, anhängt, und in der erhaltenen Differenz das Komma in derselben Columne setzt, in welcher sich die Kommata der gegebenen Zahlen befinden.

Die Proben der Addition und Subtraction der Zahlen, welche Decimaltheile enthalten, werden eben so wie die der nämlichen Operationen mit ganzen Zahlen verrichtet.

§ 90.

Da das Komma die ganzen Einheiten von den Decimaltheilen absondert, so ändert seine Verrückung nothwendiger

Weiſe den Werth der ganzen Zahl. Rückt man das Komma von der linken Seite nach der rechten zu, ſo bringt man Ziffern, die früher zu den Decimaltheilen gehörten, in denjenigen Theil, welcher die Ganzen angiebt, und man vergrößert alſo den Werth der ganzen Zahl. Rückt man hingegen das Komma von der rechten Seite nach der linken hin, ſo bringt man Ziffern, welche früher Ganze ausdrückten, in denjenigen Theil, der die Decimaltheile enthält, und verringert alſo den Werth der ganzen Zahl.

Die erſte Art der Verſetzung des Kommas macht die vorgelegte Zahl zehn, hundert, tauſend u. ſ. w. mal größer, je nachdem man es um eine, zwei, drei u. ſ. w. Stellen nach der rechten Seite hinrückt; weil jedes Mal, wenn das Komma um eine Stelle nach der rechten Seite hinrückt, alle Ziffern in Beziehung auf dieſes Komma um eine Stelle nach der linken Seite fortrücken, und folglich einen zehn mal größern Werth bekommen. Wenn man z. B. in der Zahl 134,28 das Komma zwiſchen die 2 und die 8 ſetzt, ſo hat man 1342,8. Die Hunderte ſind dann zu Tauſenden, die Zehner zu Hunderten, die Einer zu Zehnern, die Zehntel zu Einern und die Hundertel zu Zehnteln geworden. Da nun alle Theile jener Zahl zehn mal größer geworden ſind, ſo iſt es eben ſo gut als ob man die Zahl verzehnfacht oder mit 10 multiplicirt hätte.

Die zweite Art das Komma zu verſetzen macht die vorgelegte Zahl zehn, hundert, tauſend u. ſ. w. mal kleiner, je nachdem man es um eine, zwei, drei u. ſ. w. Stellen nach der linken Seite hinrückt; weil jedes Mal, wenn man das Komma um eine Stelle nach der linken Seite hinrückt, alle Ziffern in Beziehung auf dieſes Komma um eine Stelle weiter nach der rechten Seite fortrücken, und folglich einen zehn mal kleinern Werth bekommen. Wenn man z. B. in der Zahl 134,28 das Komma zwiſchen die 3 und die 4 ſetzt, ſo hat man 13,428. Die Hunderte ſind dann zu Zehnern, die Zehner zu Einern, die Einer zu Zehnteln, die Zehntel zu Hunderteln

und die Hundertel zu Tausendteln geworden. Da nun alle Theile jener Zahl zehn mal kleiner geworden sind, so ist es eben so gut, als ob man von der Zahl den zehnten Theil genommen oder sie durch zehn dividirt hätte.

§ 91.

Aus den eben angestellten Betrachtungen läßt sich der Vorzug der Decimalbrüche vor den gewöhnlichen Brüchen beurtheilen. Alle Multiplicationen, welche man mit dem Nenner eines gewöhnlichen Bruches und alle Divisionen, welche man durch ihn zu vollziehen hat, werden bei den Decimalbrüchen bloß durch Hinzufügung oder Weglassung einer gewissen Anzahl Nullen oder durch bloße Versetzung des Kommas bewerkstelligt. Wenn man diese Modificationen der Lehre von den gewöhnlichen Brüchen hinzufügt, so läßt sich daraus die Lehre von den Decimalbrüchen und die Art und Weise ableiten wie die Multiplication und Division dieser Brüche zu bewerkstelligen sind; indessen kann man hierzu durch folgende Betrachtungen direct gelangen.

Wir wollen zuförderst annehmen der Multiplicandus allein habe Decimalziffern. Läßt man das Komma weg, so wird er zehn, hundert, tausend u. s. w. mal größer, je nachdem eine, zwei, drei u. s. w. Decimalziffern hinter dem Komma standen, und das Product, welches nun die Multiplication giebt, wird eine gleiche Anzahl mal größer werden als dasjenige, welches man suchte. Man erhält also das letztere, wenn man jenes durch zehn, hundert, tausend u. s. w. dividirt, was dadurch bewerkstelligt wird, daß man auf der rechten Seite eben so viel Decimalziffern absondert (§ 90), als in dem gegebenen Multiplicandus vorhanden waren.

Wenn man z. B. 34,137 mit 9 zu multipliciren hat, so macht man zuerst das Product von 34137 mit 9, was 307233 giebt; und da die Weglassung des Kommas den Multiplicandus tausend mal größer gemacht hat, als er zuvor war, so muß man das eben gefundene Product durch 1000 dividiren,

oder die drei letzten Ziffern durch ein Komma absondern, wodurch man 307,233 erhält.

Ueberhaupt, um eine Zahl, welche Decimalziffern enthält, mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, lasse man das Komma im Multiplicandus weg, und sondere eben so viel Decimalziffern auf der rechten Seite des Productes ab, als der Multiplicandus vorher enthielt.

§ 92.

Wenn der Multiplicator Decimalziffern enthält, und man läßt daraus das Komma weg, so macht man ihn dadurch zehn, hundert, tausend u. s. w. mal größer, je nachdem eine, zwei, drei u. s. w. Decimalziffern hinter dem Komma standen, und das Product wird nun offenbar zehn, hundert, tausend u. s. w. mal größer werden als das gesuchte; das letztere erhält man daher, wenn man jenes durch eine dieser Zahlen dividirt, d. i. wenn man auf der rechten Seite so viel Decimalziffern absondert als der Multiplicator enthielt, oder das Komma, welches sich im erhaltenen Producte befindet, wenn der Multiplicandus auch Decimalziffern enthielt (§ 91), um eine gleiche Anzahl Stellen nach der linken Seite fortrückt (§ 90).

Es sey z. B. 172,84 mit 36,003 zu multipliciren. Läßt man bloß im Multiplicator das Komma weg, so hat man, nach der Regel des vorigen Hen, das Product 6222758,52. Da aber durch Weglassung des Kommas der Multiplicator tausend mal größer geworden ist als er seyn sollte, so muß dieses Product durch tausend dividirt, oder das Komma um drei Stellen weiter nach der linken Seite fortgerückt werden, wodurch man 6222,75852 als das gesuchte Product erhält, in welchem sich folglich so viel Decimalziffern befinden als zusammen genommen in beiden Factoren sind.

Ueberhaupt, um zwei Zahlen, welche Decimalziffern enthalten mit einander zu multipliciren, lasse man in beiden die Kommata weg, und sondere so viel De-

cimalziffern auf der rechten Seite des Productes ab, als beide gegebene Zahlen zuſammen genommen enthalten.

In gewiſſen Fällen muß man eine oder mehrere Nullen auf die linke Seite des Productes ſetzen um ſo viel Decimalziffern abſondern zu können, als das Product nach der eben gegebenen Regel haben ſoll. Wenn man z. B. 0,624 mit 0,003 zu multipliciren hat, ſo erhält man, durch Multiplication der Zahlen 624 und 3, die Zahl 1872, welche nur vier Ziffern hat. Da nun aber 6 Ziffern abgeſondert werden ſollen, ſo kann dies nur geſchehen, wenn man drei Nullen auf die linke Seite dieſer Zahl ſetzt, von welchen eine die Stelle der Einer einzunehmen beſtimmt iſt. Man erhält alſo 0,001872.

§ 93.

Es iſt einleuchtend, daß der Quotient zweier Zahlen auf keine Weiſe von der abſoluten Größe ihrer Einheiten abhängt (§ 47), vorausgeſetzt, daß ſie in beiden dieſelbe ſey. Wenn alſo 451,49 durch 13 zu dividiren iſt, ſo erwäge man, daß die erſte Zahl ſo viel als 45149 Hundertel und die zweite ſo viel als 1300 Hundertel iſt, und daß dieſe letztern Zahlen denſelben Quotienten geben müſſen als wenn ſie Einer ausdrückten. Dieſe Betrachtung führt darauf das Komma in der erſten Zahl wegzulaſſen und der zweiten Zahl zwei Nullen anzuhängen, ſo daß man nur 45149 durch 1300 zu dividiren hat, woraus ſich $34\frac{949}{1300}$ als Quotient ergiebt.

Dieſem zufolge muß man, um eine Zahl, welche Decimalziffern hat, durch eine ganze Zahl zu dividiren, das Komma in der erſten weglaſſen, und der andern Zahl ſo viel Nullen anhängen, als der Dividendus Decimalziffern enthielt; im Quotienten wird man alsdann nichts zu ändern haben.

§ 94.

Wenn beide, der Dividendus und der Diviſor, Decimalziffern enthalten, muß man, ehe man das Komma weg-

läßt, derjenigen von beiden Zahlen, welche die wenigsten Decimalziffern hat, so viel Nullen anhängen als erforderlich sind, damit sie mit derselben Ordnung der Decimaltheile endige als die andere. Alsdann beziehen sich beide Zahlen auf dieselben Theile der Einheit, und geben also denselben Quotienten, als wenn sie ganze Einheiten ausdrückten. Ist z. B. 315,432 durch 23,4 zu dividiren, so verwandele man die letzte Zahl in 23,400, und dividire dann 315432 durch 23400, wodurch man $13\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{2}{0}\frac{}{0}$ zum Quotienten erhält.

Also, um zwei Zahlen, welche Decimalziffern enthalten, durch einander zu dividiren, hänge man derjenigen von beiden, welche die wenigsten Decimalziffern enthält, so viel Nullen an als erforderlich sind, damit die Anzahl der Decimalziffern in beiden gleich ist, und lasse sodann das Komma weg; im Quotienten wird man alsdann nichts zu ändern haben.

§ 95.

Da man die Decimalbrüche nur anwendet um nicht mit gewöhnlichen Brüchen zu rechnen, so ist es natürlich sich ihrer zu bedienen, wenn man sich einem Quotienten nähern will, der sich nicht in ganzen Zahlen angeben läßt. Dies geschieht, wenn man den Rest der Division in Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. verwandelt, damit er den Divisor enthalte, wie im folgenden Beispiele zu sehen ist.

45149	1300
6149	34,73
949	
9490	
3900	
0000	

Sobald man nämlich zum Reste 949 gekommen ist, hängt man ihm eine Null an, um ihn mit 10 zu multipliciren oder ihn in Zehntel zu verwandeln, wodurch ein neuer Partial-Dividendus gebildet wird, der aus 9490 Zehnteln besteht und 7 Zehntel zum Quotienten giebt. Diese 7 Zehntel

schreibt man auf die rechte Seite der Einer, nachdem man neben diesen ein Komma gesetzt hat. Den folgenden Rest, 390 Zehntel, verwandelt man durch Hinzufügung einer Null in Hundertel, und man erhält einen neuen Partial-Dividendus, der aus 3900 Hunderteln besteht und 3 Hundertel zum Quotienten giebt, welche man auf die rechte Seite der Zehntel setzt. Hier endigt die Operation von selbst, und man hat also zum vollständigen Resultate 34,73. Wenn ein dritter Rest geblieben wäre, hätte man die Division weiter fortsetzen müssen, indem man diesen Rest in Tausendtel verwandelt und auf diese Weise so lange fortfährt, bis kein Rest, oder ein aus so kleinen Theilen bestehender Rest übrig geblieben wäre, daß man ihn als unbeträchtlich hätte ansehen können.

Es leuchtet ein, daß man immer, wie in dem vorhergehenden Beispiele, nach den Einern des Quotienten ein Komma setzen muß, um die die ganze Zahl bedeutenden Ziffern von den Decimalziffern abzusondern, und daß die Anzahl der letztern der Anzahl der Nullen gleich ist, die man nach und nach den Resten angehängt hat *).

§ 96.

Wenn man den Zähler eines gewöhnlichen Bruches in Decimaltheile verwandelt, so kann er durch den Nenner, wie im vorigen Beispiele, dividirt werden, und hierdurch wird also der Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. Es sey z. B. der gegebene Bruch $\frac{1}{6}$, so verfahre man wie folgt:

---

*) Die Aufgabe, welche wir so eben in Betreff der Decimalbrüche gelöst haben, ist nur ein besonderer Fall von folgender allgemeinern: Den Quotienten einer Division in Brüchen von gegebener Benennung zu bestimmen, welche dadurch gelöst wird, daß man den Dividendus durch Multiplication mit dem gegebenen Nenner in einen Bruch von dieser Benennung verwandelt, und dann erst die Division verrichtet. So z. B. um den Quotienten von 7 durch 3 in Funfzehnteln anzugeben, multiplicirt man 7 mit 15, und dividirt das Product 105 durch 3. Dadurch erhält man 35 Funfzehntel oder $\frac{35}{15}$ für den verlangten Quotienten.

Verf.

1	8
10	0,125
20	
40	

Es sey ferner der Bruch $\frac{4}{797}$ gegeben, so muß man den Zähler erst in Tausendtel verwandeln, bevor man die hier folgende Division anfangen kann.

4	797 *)
4000	0,005018
1500	
7030	
654	

§ 97.

Wie weit man auch die Division in dem letzten Beispiele fortsetzen mag, so wird man doch nie zu einem Quotienten ohne Rest kommen, weil der Bruch $\frac{4}{797}$ nicht genau in Decimaltheilen angegeben werden kann **), was allerdings bei dem Bruche $\frac{1}{8}$ möglich war.

Dieser Unterschied beruht auf folgendem Grunde. Da der Zähler eines Bruches durch dessen Nenner nicht theilbar ist, so kann die in Rede stehende Division nur dann ohne Rest

---

*) Man kann sich auch die Aufgabe stellen: einen gegebenen Bruch in einen Bruch von einer andern, kleinere Theile ausdrückenden, Benennung zu verwandeln, z. B. $\frac{3}{4}$ in Siebzehntel. Hierzu gelangt man, wenn man 3 mit 17 multiplicirt, und das Product durch 4 dividirt. Man findet auf diese Weise $\frac{51}{4}$ vom Siebzehntel oder $12\frac{3}{17}$ und $\frac{3}{4}$ vom Siebzehntel. Nun sind $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{17}$ gleich $\frac{3}{68}$ (§ 78), und das Resultat $12\frac{3}{17}$ ist also näherungsweise bis auf $\frac{3}{68}$ richtig.

Diese Operation und die in der vorigen Anmerkung angegebene beruhen auf demselben Grunde, auf welchem die correspondirenden Operationen im Decimal-Systeme beruhen. Vers.

**) Dies bestätigt das in der Anmerkung zum § 83 Gesagte, aber es hindert nicht für den Bruch $\frac{4}{797}$ einen Decimalbruch in die Rechnung einzuführen. Denn wäre etwa 0,005018 für die beabsichtigte Genauigkeit zu gering, so müßte man die erwähnte Division weiter fortsetzen, und wenn man sie bis zur 12ten Stelle des Quotienten treibt, würde man 0,005018820577

endigen, wenn eine von den Zahlen 10, 100, 1000 u. ſ. w., mit welchen man nach und nach den Zähler multiplicirt, durch den Nenner theilbar iſt, weil, nach einem Satze, der in der Algebra erwieſen wird, ein Product nur dann durch eine andere Zahl theilbar iſt, wenn ſeine Factoren durch die Primfactoren dieſer Zahl theilbar ſind. Da nun aber die Zahlen 100, 1000 u. ſ. w. durch die Multiplicationen der Zahl 10 mit ſich ſelbſt gebildet, und die Primfactoren der letztern Zahl 2 und 5 ſind, ſo können die Zahlen 10, 100, 1000 auch nur durch Zahlen theilbar ſeyn, die weiter keine Factoren als 2 und 5 haben. 8 iſt eine ſolche Zahl, denn ſie iſt gleich 2 mit 2 mit 2.

Wenn man einen gewöhnlichen Bruch, der ſich nicht genau in Decimaltheilen angeben läßt, auf die angeführte Weiſe, in einen Decimalbruch verwandelt, und die Operation weit genug fortſetzt, ſo findet man einen Näherungs-Ausdruck, welcher ein eigenthümliches Merkmal hat, das zugleich dazu dient aus dieſem Ausdruck den genauen Bruch wieder zu finden. Dieſes Merkmal beſteht in der periodiſchen Wiederkehr derſelben Ziffern. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{13}{37}$ in einen Decimalbruch verwandelt, findet man 0,324324324...., in welchem Ausdrucke die Ziffern 3, 2, 4 in derſelben Ordnung immer wiederkehren, ohne daß die Operation je von ſelbſt endigen könne.

---

finden, ein Decimalbruch, durch welchen der Werth von $\frac{4}{797}$ bei weitem genauer ausgedrückt wird, als es durch 0,005018 geſchieht. Die Größe des Fehlers aber, den man begeht, wenn man ſtatt $\frac{4}{797}$ den Decimalbruch 0,005018 ſetzt, läßt ſich, ohne auch nur eine der übrigen Decimalziffern zu kennen, leicht beurtheilen. Er beträgt nämlich weniger als 0,000001, weil der genaue Werth von $\frac{4}{797}$ offenbar größer als 0,005018 und kleiner als 0,005019 iſt. Und aus dieſem Beiſpiele ſieht man, daß überhaupt der Fehler, den man begeht, wenn man die folgenden Ziffern eines Decimalbruches wegläßt, immer kleiner iſt als eine Einheit von der Ordnung der letzten beibehaltenen Decimalziffern. Ueberſ.

Daß die periodiſche Wiederkehr der Ziffern nothwendig Statt finden müſſe, wenn die Diviſion nicht von ſelbſt endigt, läßt ſich leicht einſehen. Denn, da man bei der Diviſion als Partial-Reſte nur ganze Zahlen erhalten kann, die kleiner als der Diviſor ſind, ſo muß man, wenn mehr Diviſionen gemacht werden als es ſolche Zahlen giebt, nothwendiger Weiſe einen von den vorhergehenden Reſten wieder erhalten *), und dann kehren folglich die Partial-Dividenden in derſelben Ordnung wieder.

In dem obigen Beiſpiele waren drei Partial-Diviſionen hinreichend um dieſe Wiederkehr herbei zu führen; bei der Verwandlung des Bruches $\frac{1}{7}$ hingegen ſind ſechs ſolcher Diviſionen erforderlich, weil man hier alle ſechs Zahlen, die kleiner als 7 ſind, zu Reſten erhält, und man findet 0,1428571..... Der Bruch $\frac{1}{3}$ giebt den Decimalbruch 0,3333 .....

§ 98.

Die gewöhnlichen Brüche, deren Zähler 1 und deren Nenner eine bloß mit Neunen geſchriebene Zahl iſt, geben, in Decimalbrüche verwandelt, Perioden, die nur die geltende Ziffer 1 enthalten.

$\frac{1}{9}$ giebt 0,1111 .....

$\frac{1}{99}$ giebt 0,010101 .....

$\frac{1}{999}$ giebt 0,001001001 .....

und Aehnliches geben die folgenden Brüche, weil in jeder Partial-Diviſion 10, 100, 1000 u. ſ. w. die Dividenden ſind, welche wieder 1 zum Reſte laſſen.

Achtet man auf dieſen Umſtand, ſo wird man leicht aus einem periodiſchen Decimalbruch den gewöhnlichen Bruch wieder finden, aus dem er entſtanden iſt. Man ſieht nämlich gleich, daß

*) Der Partial-Dividendus, den man durch das Anhängen einer Null an dieſem Reſte bildet, iſt alſo einem frühern Partial-Dividendus, den man ebenfalls durch das Anhängen einer Null an einem gleichen Reſte gebildet hat, gleich. Ueberſ.

daß z. B. 0,3333 .... dem Bruche 0,1111 .... mit 3 multiplicirt gleich iſt, und da nun der letztgenannte Bruch die Entwickeluug von $\frac{1}{9}$ iſt, ſo folgt, daß der erſtgenannte die Entwickelung von $\frac{1}{9}$ multiplicirt mit 3, oder von $\frac{3}{9}$ oder endlich von $\frac{1}{3}$ iſt.

Wenn Decimalbrüche gegeben ſind, deren Periode aus zwei Ziffern beſteht, ſo vergleiche man ſie mit der Entwickelung von $\frac{1}{99}$, falls ſie aus drei Ziffern beſteht mit der Entwickelung von $\frac{1}{999}$, u. ſ. f.

Iſt z. B. 0,324324.... gegeben, ſo leuchtet ein, daß dieſer Bruch durch die Multiplication von 0,001001.... mit 324 gebildet werden kann. Multiplicirt man alſo $\frac{1}{999}$, von welchem Bruche 0,001001 die Entwickelung iſt, mit 324, ſo hat man $\frac{324}{999}$ für den genauen Werth des gegebenen Decimalbruches, und dividirt man beide Glieder dieſes Reſultates durch 27, ſo bekommt man den Bruch $\frac{12}{37}$ wieder.

Ueberhaupt: Der gewöhnliche Bruch, aus welchem ein periodiſcher Decimalbruch entſtanden iſt, wird gebildet, wenn man ſeine Periode zum Zähler, und diejenige Zahl zum Nenner nimmt, welche mit ſo viel 9 geſchrieben wird als die Periode Ziffern hat.

Wenn die Periode nicht mit der erſten Decimalziffer anfängt, ſetze man, um den erzeugenden Bruch zu finden, das Komma unmittelbar vor die erſte Ziffer der Periode, und verwandele den nunmehrigen Decimalbruch nach der eben gegebenen Regel in einen gewöhnlichen Bruch, wodurch man alſo eine gemiſchte Zahl erhält, welche man nun durch 10, 100, 1000 u. ſ. w. zu dividiren haben wird, je nachdem man das Komma um eine, zwei, drei u. ſ. w. Stellen nach der rechten Seite hingerückt hat. Für den Bruch 0,324141.... z. B. ſchreibt man zuförderſt 32,4141...., und da 0,4141.... gleich $\frac{41}{99}$ iſt, ſo hat man $32\frac{41}{99}$, welche Zahl durch 100 dividirt werden muß, weil das Komma um zwei Stellen nach der rechten Seite hingerückt worden. Man erhält alſo $\frac{3241}{100}$ und

$\frac{41}{9900}$, oder, wenn man diese Brüche addirt, $\frac{3209}{9900}$, ein Bruch, welcher den vorgelegten wieder erzeugen würde *).

Um sich eine richtige Vorstellung von der Natur dieser Ausdrücke zu machen, wird es hinreichen, den Bruch 0,9999... genauer zu betrachten. Sucht man nämlich, nach der vorhergehenden Regel, seinen ursprünglichen Werth, so findet man $\frac{9}{9}$ oder 1; indessen wie viel Ziffern man auch immer nehmen mag ehe man den Ausdruck abbricht, so wird man dadurch doch niemals die Einheit bilden. Nimmt man nur eine Ziffer, so fehlt $\frac{1}{10}$, nimmt man zwei Ziffern, so fehlt $\frac{1}{100}$, nimmt man drei, so fehlt $\frac{1}{1000}$ u. s. w.; so, daß man sich zwar der Einheit so weit als man will nähern, sie aber nie erreichen kann. Die Einheit ist also hier nur die Grenze, der sich der Ausdruck 0,999.... desto mehr nähert, je mehr Ziffern man hineinsetzt.

---

§ 99.

Das Vorhergehende enthält die wesentlichen Regeln der Arithmetik der abstracten Zahlen. Um aber die im gemeinen Leben vorkommenden Anwendungen derselben zu verstehen, muß man die verschiedenen Einheiten kennen, welche gebraucht werden, um die unter mancherlei Gestalten vorkommenden Größen mit einander zu vergleichen oder den Werth derselben zu bestimmen. Diese Einheiten, welche nichts anderes als die gebräuchlichen Maaße sind, haben sich mit der Zeit und mit dem Orte verändert. Ihre Verknüpfung ist erst später entstanden, nachdem das Bedürfniß und die Fortschritte der Künste und Wissenschaften bei vielen Messungen eine größere Genauigkeit nöthig gemacht haben.

---

*) Vollständigere Untersuchungen über die periodischen Decimalbrüche, die sich größtentheils ohne Kenntniß der Algebra nicht wohl anstellen lassen, findet man am ausführlichsten in den Nouv. Mémoires de l'Académie de Berlin. Année 1771 (1773) p. 273-337 und in Gauss disquisitiones arithmeticae (1801) § 312. f. f. Uebers.

Der Standpunkt, auf welchem die Anfangsgründe der Arithmetik im Unterrichte stehen, erlaubt nicht all die wissenschaftlichen Arbeiten anzuführen, welche zur Feststellung der beiden Maaß-Systeme, von denen in den folgenden §§ die Rede seyn wird, erfoderlich gewesen sind. Wir beschränken uns darauf die Benennungen und Eintheilungen dieser Maaße kennen zu lehren, und einige der oben erwähnten Anwendungen zu zeigen.

§ 100.

Die Größen, welche im gemeinen Leben gemessen zu werden pflegen, können folgendermaßen classificirt werden:

Die Längen der Linien, deren Maaß Längen-Maaß;

Die Räume, welche Flächen einnehmen, deren Maaß Flächen- oder Quadrat-Maaß;

Die Räume, welche feste oder flüssige Körper einnehmen, deren Maaß Körper- oder Cubik-Maaß;

Die absolute Schwere der Körper, deren Maaß Gewicht heißt *).

Vom Preußischen Maaß-Systeme.

§ 101.

In sämmtlichen Preußischen Staaten ist der preußische Fuß das Grundmaaß, und zugleich die Haupt-Einheit des Längen-Maaßes. Größere Längen werden nach Ruthen und Meilen, kleinere nach Zollen und Linien gemessen, und es gehören 12 preuß. Fuß zu einer preuß. Ruthe, und 2000 preuß. Ruthen zu einer preuß. Meile **); hingegen hat ein Fuß 12 Zoll, und ein Zoll 12 Linien. Folgende Tafeln machen den Zusammenhang dieser Maaße übersichtlich.

*) Das Zeit-Maaß wird hier übergangen.

**) Die geographische Meile, deren 15 auf einen Grad gehen, enthält, nach den neuesten Messungen, 23640 preuß. Fuß.

1 Meile gleich 2000 Ruthen gleich 24000 Fuß
1 " " 12 "

1 Fuß gleich 12 Zoll gleich 144 Linien
1 " " 12 "

Beim Feldmeſſen wird gewöhnlich die Ruthe als Längen-Einheit angenommen, und kleinere Längen werden in Decimaltheilen der Ruthe angegeben.

Zum Meſſen gewebter Zeuge bedient man ſich der Elle. Die Berliner Elle enthält $2\frac{1}{3}$ preuß. Fuß, und wird in halbe, viertel, achtel u. ſ. w. eingetheilt.

Beim Bergbau iſt der Lachter als Längen-Maaß üblich. Er enthält $6\frac{2}{3}$ preuß. Fuß, und wird in 8 Achtel, das Achtel in 10 Lachterzolle, der Lachterzoll in 10 Primen, die Prime in 10 Secunden getheilt.

Beim Seeweſen iſt der Faden die gewöhnliche Einheit des Längen-Maaßes. Er iſt 6 preuß. Fuß lang.

Der Quadrat-Fuß, der Quadrat-Zoll, die Quadrat-Ruthe und die Quadrat-Meile ſind die gebräuchlichſten Flächen-Maaße. Ein Quadrat-Fuß iſt ein Quadrat, d. i. ein gleichſeitiges und gleichwinkliges Viereck, deſſen Seite einen Fuß lang; ein Quadrat-Zoll iſt ein Quadrat, deſſen Seite einen Zoll lang iſt, u. ſ. w. Es iſt leicht einzuſehen, daß demnach

1 Quadrat-Ruthe gleich 144 Quadrat-Fuß gleich 20736 Quadrat-Zoll
1 " " 144 "

Außer dieſen Flächen-Maaßen bedient man ſich bei Feldern und Ackerſtücken des Morgens. Ein preußiſcher Morgen enthält 180 preuß. Quadrat-Ruthen.

Der Cubik-Fuß, der Cubik-Zoll und die Cubik-Ruthe ſind Körper-Maaße. Ein Cubik-Fuß iſt ein Würfel oder Cubus, d. i. ein von ſechs gleichen Quadraten begrenzter Körper, deſſen Kante einen Fuß lang; ein Cubik-Zoll iſt ein Würfel, deſſen Kante einen Zoll lang iſt, u. ſ. f. Man wird ohne Schwierigkeit einſehen, daß demnach

1 Cubik-Ruthe gleich 1728 Cubik-Fuß gleich 2985984 Cubik-Zoll
1 " " 1728 "

Außer diesen Körper-Maaßen bedient man sich zum Messen verschiedener trockener Dinge, als Getreide und dergleichen, des **Wispels**, des **Scheffels** und der **Metze**. Es ist

1 Wispel gleich 24 Scheffel gleich 384 Metzen
1 " " 16 "

Der Berliner Scheffel ist ein cylinderisches Gefäß, dessen Durchmesser 22 preuß. Zollen und dessen Raum-Inhalt 3072 preuß. Cubik-Zollen gleich seyn soll.

Brennholz wird nach **Haufen** zu $4\frac{1}{2}$ **Klafter** gemessen. Ein Haufen ist 18 Fuß lang, 9 Fuß hoch und 3 Fuß breit; ein Klafter 6 Fuß lang, 6 Fuß hoch und 3 Fuß breit.

Ferner braucht man zum Messen des Salzes, des Kalkes und dergleichen die **Tonne**, deren Raum-Inhalt gleich $7\frac{1}{2}$ preuß. Cubik-Fuß ist. (Die zum Messen der Leinsaat gebräuchliche Tonne macht hiervon eine Ausnahme, indem sie $37\frac{1}{2}$ Metzen enthalten soll).

Zum Messen der Flüssigkeiten dient das **Quart**. Der Raum-Inhalt des Berliner Quarts soll 64 preuß. Cubik-Zollen gleich seyn. (Demnach sind 3 Quart und 1 Metze dem Raum-Inhalte nach gleich).

Insbesondere werden als Wein-Maaße **Orhoft**, **Ohm**, **Eimer**, **Anker** und **Quart** gebraucht, von welchen

1 Orhft. gleich $1\frac{1}{2}$ Ohm gleich 3 Eim. gleich 6 Ank. gleich 180 Qrt.
1 " " 2 " " 4 " " 120 "
1 " " 2 " " 60 "
1 " " 30 "

und als Bier-Maaße dienen **Gebräude**, **Kufen**, **Faß**, **Tonne**, **Oehmchen** und **Quart**, welche wie folgt zusammenhängen;

Gebräude		Kufen		Faß		Tonnen		Oehmchen		Quart
1	=	9	=	18	=	36	=	144	=	3600
		1		2		4		16		400
				1		2		8		200
						1		4		100
								1		25

Die Haupt-Einheit des Gewichtes ist das **preußische**

Pfund (℔) *). Außerdem bedient man ſich zu größern und kleineren Abwägungen des Centners (Ctr.), der Mark (Mrk.) des Lothes (Lth.), des Quentchens (Qu.) und des Grans (Gr.); und es iſt

1 Ctr. =	110 ℔ =	220 Mrk. =	3520 Lth. =	14080 Qu. =	63360 Gr.
1	2	32	128	576	
	1	16	64	288	
		1	4	18	
			1	4½	

Als Apotheker- oder Medicinal-Gewicht dient das Medicinal-Pfund, welches mit ¾ preuß. Pfund übereinkommt, und in Unzen (℥), Drachmen (ʒ) Scrupel (℈) und Gran (gr.) wie folgt eingetheilt wird:

1 Med. ℔ gleich	12 ℥ gleich	96 ʒ gleich	288 ℈ gleich	5760 gr.
1	8	24	480	
	1	3	60	
		1	20	

Juwelen werden nach Karaten gewogen. 160 ſolcher Karate ſind 9 preuß. Quentchen gleich.

Die eigenthümliche Silbermünze des preußiſchen Staates iſt der preußiſche Thaler, welcher 1$\frac{1}{21}$ Loth wiegen, 1$\frac{1}{7}$ Loth feines (d. i. reines) Silber nnd $\frac{8}{21}$ Loth Kupfer enthalten ſoll. (10½ Thalerſtücke wiegen daher eine preuß. Mark, und 14 Thalerſtücke enthalten eine preuß. Mark feinen Silbers). Die Unterabtheilungen des Thalers ſind Silbergroſchen (Sgr.) und Pfennige (Pf.), und zwar iſt

1 Rthl.	gleich 30 Sgr.	gleich 360 Pf.
	1	12

Die eigenthümliche Goldmünze des preußiſchen Staates

*) Die Größe des preuß. Pfundes iſt geſetzlich dadurch beſtimmt, daß es der ſechsundſechzigſte Theil des Gewichtes eines Cubik-Fußes deſtillirten Waſſers, im luftleeren Raume bei einer Temperatur von 15 Graden der achtzigtheiligen Scale des Queckſilber-Thermometers, ſeyn ſoll.

Nach dieſer Beſtimmung kommt die Hälfte eines preußiſchen Pfundes, welche eine preußiſche Mark genannt wird, mit der ſonſt beim Münzweſen üblichen cölniſchen Mark genau überein.

ist der Friedrichsd'or, welcher $8\frac{3}{5}$ Grän wiegen, $7\frac{1}{7}$ Grän feines Gold und $\frac{2}{7}$ Grän Zusatz enthalten soll. (35 Friedrichsd'or wiegen daher eine preußische Mark und enthalten 260 Grän feines Gold) *).

Vom neuen Französischen Maaß-Systeme.

§ 102.

In diesem Maaß-Systeme heißt

die Haupt-Einheit des Längen-Maaßes Meter,

die Haupt-Einheit des Flächen-Maaßes Are,

die Haupt-Einheit des Körper-Maaßes Stere oder Cubik-Meter,

die Haupt-Einheit des Körper-Maaßes für gewisse Substanzen Liter

die Haupt-Einheit des Gewichts Gramme.

Um größere oder kleinere Maaße zu bilden, bedient man sich der aus dem Griechischen und Lateinischen herkommenden Wörter Myria, Kilo, Hecto, Deca, deci, centi, milli u. s. w., welche, nach der Reihe, Zehntausende, Tausende, Hunderte, Zehner, Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. bezeichnen. Die Längen-Maaße bilden demnach folgende Reihe: Myriameter, Kilometer, Hectometer, Decameter, Meter, Decimeter, Centimeter, Millimeter u. s. w.

Jedes dieser Maaße ist zehnmal größer als das nächstfolgende, und zehnmal kleiner als das nächstvorhergende, und es ist

*) Da alle Längen-, Flächen- und Körper-Maaße von dem preuß. Fuß, alle Gewichts-Einheiten von dem preuß. Pfunde, und dieses durch die in der vorhergehenden Anmerkung mitgetheilte Bestimmung von der Länge des preuß. Fußes abhängig gemacht, da ferner die preußischen Münzen nach diesen Gewichten bestimmt sind; so ist einleuchtend, daß der preußische Fuß, wie im Eingange dieses schon gesagt worden, das Grund-Maaß des ganzen preußischen Maaß-Systems ist.

Um die absolute Länge dieses Fußes zu bestimmen, setzt das Gesetz fest, daß er 139,13 Linien des in wissenschaftlichen Verhandlungen allgemein bekannten alten Pariser Fußes gleich seyn soll, wodurch er zugleich dem sonst gebräuchlichen rheinländischen Werkfuß genau gleich ist.

1 Myriameter	gleich	10000	Meter
1 Kilometer	;	1000	;
1 Hectometer	;	100	;
1 Decameter	;	10	;
1 Meter	;	1	;
1 Decimeter	;	0,1	;
1 Centimeter	;	0,01	;
1 Millimeter	;	0,001	;

Der Liter, ein Maaß für den körperlichen Raum, hat einen Inhalt, welcher dem eines Cubik-Decimeters gleich ist.

Die Namen der Körper-Maaße werden eben so wie die der Längen-Maaße zusammengesetzt. Man sagt daher: Hectoliter, Decaliter, Liter, Deciliter, Centiliter u. s. w.

Der Gramme ist ein Gewicht, welches dem eines Cubik-Centimeters reinen Wassers gleich ist *). Der Myriagramme, Kilogramme, Hectogramme, Decagramme, Gramme, Decigramme, Centigramme u. s. w. bilden eine Decimal-Reihe, eben so wie die anderen Maaße.

Der Are, ein Maaß für den Flächenraum, ist einem Quadrat-Decameter oder hundert Quadrat-Metern gleich. Es giebt nur zwei Vielfache dieses Maaßes, welche im Gebrauch sind, nämlich der Hectare, welcher hundert Are und der Myriare, welcher zehn tausend Are enthält.

Der Stere für das Brennholz ist einem Cubik-Meter gleich.

Die Einheit des Geldes ist der Frank zu 10 Decimes und zu 100 Centimes. Der Frank ist eine Münze, die 5 Gramme wiegt, und aus $\frac{9}{10}$ Silber und $\frac{1}{10}$ Kupfer besteht **).

---

*) Um die größtmögliche Genauigkeit in der Bestimmung dieser Maaß-Einheit zu erhalten, bediente man sich destillirten Wassers, welches auf eine Temperatur ($3\frac{1}{4}$ Grad der 80theiligen Scale) gebracht war, bei welchem es seine größte Dichtigkeit erreicht. Verf.

**) Alle Maaße dieses Systems hängen von einander und von der Größe des Erd-Sphäroid's ab. Denn um den Meter zu bestimmen hat man einen Bogen des durch Paris gehenden Meridians, mit einer bis dahin noch nie angewandten Genauigkeit, gemessen, daraus die Entfernung des Pols vom Aequator berechnet, und ein Zehnmillionteil dieser Entfernung für den Meter festgesetzt. Verf.

Von der Rechnung mit benannten Zahlen.

§ 103.

Zahlen, welche aus mehreren auf verschiedene Einheiten bezogenen Theilen bestehen, wie z. B. Ruthen, Fuß und Zoll; Centner, Pfund, Loth und Quentchen; Thaler, Groschen und Pfennige, wollen wir *mehrnamige* oder *complexe Zahlen* nennen, im Gegensatze mit denjenigen, welche aus einem auf eine einzige Einheit bezogenen Theil bestehen und *einnamige* oder *incomplexe Zahlen* heißen.

Die vier Fundamental-Operationen der Arithmetik werden mit mehrnamigen Zahlen nach den Regeln verrichtet, die wir in den folgenden §§ aufstellen werden. Es wird sich dabei zeigen, wie sehr die, in dem neu-französischen Maaß-Systeme eingeführten, zehntheiligen Unterabtheilungen die Rechnung erleichtern. Es lassen sich nämlich die zehntheiligen Maaße und ihre Unterabtheilnngen, nach dem, was im § 90 bemerkt worden, durch bloße Versetzung des Kommas in einander verwandeln. Wenn man z. B. 314,513 Meter in Decimeter verwandeln will, so reicht es hin, das Komma um eine Stelle nach der rechten Seite hin fortzurücken, wodurch man ohne Weiteres 3145,13 Decimeter erhält. Läßt man das Komma weg, so verwandelt man die 314,513 Meter in 314513 Millimeter. Von dieser letzten Unterabtheilung gelangt man wieder zu den vorhergehenden, das heißt zu Centimetern, Decimetern oder Metern, wenn man eine, zwei oder drei Decimalstellen absondert. Sondert man vier Decimalstellen ab, so erhält man 31,4513 Decameter, und auf ähnliche Weise 3,14513 Hectometer, u. s. w. Alles dieses läßt sich ohne Schwierigkeit auf jedes andere Decimal-Maaß anwenden, und hierin besteht einer der größten Vorzüge des in Rede stehenden Maaß-Systems.

Von der Addition benannter Zahlen.

§ 104.

Jede Aufgabe, welche darin beſteht mehrere Zahlen in eine einzige zuſammenzuziehen, iſt durch die Addition zu löſen.

Um z. B. zu finden, wie viel ein Kaufmann eingenommen, der von einer gewiſſen Waare nach einander für 1334 Franken 45 Centimen, für 1951 Fr. 17 C. und für 183 Fr. 11 C. verkauft hat, darf man nur dieſe drei Zahlen addiren. Da nun 1 Frank 100 Centimen hat, ſo kann man die drei gegebenen complexen Zahlen, vermittelſt der Decimalbrüche, in einnamige verwandeln, wenn man ſie wie folgt ſchreibt:

	1334,45	Franken
	1951,17	‚
	183,11	‚
Summe . . .	3468,73	Franken

und man findet dann (§ 88) die darunter ſtehende Summe, welche 3468 Fr. 73 C. iſt.

Auf dieſelbe Weiſe findet man die geſammte Länge von vier Stücken Tuch, die einzeln 217 Meter 43 Centimeter, 97 M. 21 Cm., 194 M. 7 Cm., und 51 M. 34 Cm. lang ſind, wenn man anſetzt:

	217,43	Meter
	97,21	‚
	194,07	‚
	51,34	‚
Geſammte Länge	560,05	Meter oder 560 M. 5 Cm.

§ 105.

Sind die Unterabtheilungen der gegebenen zu addirenden mehrnamigen Zahlen nicht zehntheilig, ſo iſt die Rechnung, wiewohl ſie noch auf denſelben Gründen beruht, weniger einfach. Es kommt nämlich noch immer darauf an die Theile, welche eine gleiche Benennung haben, zuſammenzuzählen; wenn aber die Summe dieſer Theile groß genug iſt, um eine oder mehrere Einheiten einer höhern Abtheilung zu bilden, ſo

zählt man dieſe Einheiten zu denjenigen, welche in den gegebenen Zahlen vorkommen, grade ſo wie man bei jeder Addition die Zehner einer Columne zur links daneben ſtehenden Columne hinzufügt. Man muß daher auch die mehrnamigen Zahlen, die man addiren will, ſo ſchreiben, daß ihre verſchiedenen Einheiten oder Theile von gleicher Benennung in einer und derſelben Columne zu ſtehen kommen, und ſodann eine jede Columne für ſich addiren, wobei man ſich zu erinnern hat, wie viel Einheiten einer jeden Unterabtheilung zu einer Einheit der nächſt höhern Abtheilung gehören.

Das folgende Beiſpiel wird zur Erläuterung dienen.

984	Rthl.	18	Sgr.	8	Pf.
38	"	9	"	9	"
1413	"	21	"	10	"
319	"	27	"	2	"
2756	Rthl.	17	Sgr.	5	Pf.

Wenn man zunächſt die Columne der Pfennige addirt, weil dieſe die niedrigſte Abtheilung ſind, findet man 29 Pfennige. Da nun aber 12 Pfennige einen Silbergroſchen ausmachen, ſo hat man 2 Silbergroſchen und 5 Pfennige. Man ſchreibt nun dieſe 5 Pfennige hin, und behält die 2 Silbergroſchen zurück, um ſie zu der folgenden Columne der Silbergroſchen hinzuzufügen. Addirt man nun die Einer-Columne der Silbergroſchen und zählt die zurückgehaltenen 2 Silbergroſchen hinzu, ſo findet man 27 Silbergroſchen. Hiervon ſchreibt man nur die 7 Einer hin, und hält die 2 Zehner zurück, um ſie zu der Zehner-Columne der Silbergroſchen hinzuzufügen, deren Summe ſich alsdann auf 7 Zehner beläuft. Da nun aber der Thaler aus 30 Silbergroſchen beſteht, und alſo 3 Zehner von Silbergroſchen enthält, ſo findet man die Anzahl der Thaler, welche aus der Summe der Silbergroſchen hervorgehen, wenn man die 7 Zehner durch 3 dividirt. Man erhält alsdann 2 zum Quotienten und 1 zum Reſte, den man hinſchreibt, und die 2 Thaler zurück behält, um ſie zu den gegebenen Thalern hinzuzurechnen. Von hier an wird die

Operation eben so wie bei einnamigen Zahlen verrichtet, und man findet dann 2756 Thlr. 17 Sgr. 5 ₰.

§ 106.

Wir wollen zu diesem Verfahren, welches bei jeder andern Art von Unterabtheilungen angebracht werden kann, keine in Worte gefaßte Regel aufstellen, sondern nur einige Beispiele geben, bei welchen man sich aber zu erinnern hat, daß 12 Linien 1 Zoll, 12 Zoll 1 Fuß, 12 Fuß 1 Ruthe, ferner daß 4 Quentchen 1 Loth, 32 Loth 1 Pfund und 110 Pfund 1 Centner ausmachen.

	34	Ruthen	5	Fuß	7	Zoll	8	Linien
	16	′	3	′	5	′	6	′
	127	′	4	′	11	′	9	′
Summe ...	178	Ruthen	2	Fuß	—	Zoll	11	Linien

	3725	Ltr.	27	U.	16	Lth.	3	Qu.
	4934	′	98	′	29	′	2	′
	8955	′	108	′	18	′	1	′
	12877	′	95	′	12	′	—	′
Summe ...	30494	Ltr.	—	U.	12	Lth.	2	Qu.

Von der Subtraction benannter Zahlen.

§ 107.

Die Subtraction mehrnamiger Zahlen, bei welchen zehntheilige Unterabtheilungen Statt finden, wird auf dieselbe Weise, die wir bei der Addition angewendet haben, in eine Subtraction einnamiger Zahlen verwandelt.

Sind die Unterabtheilungen nicht zehntheilig, und ist man genöthigt von einer Abtheilung eine Einheit zu borgen, um die Subtraction einer größern Zahl von einer kleinern möglich zu machen, so muß man auf das Verhältniß der Unterabtheilungen zu einander Acht haben.

In der folgenden Subtractions-Aufgabe z. B.

	795	Rthl.	3	Sgr.	—	Pf.
	684	„	27	„	4	„
Rest . . .	110	Rthl.	5	Sgr.	8	Pf.

muß man von der Columne der Silbergroschen 1 Sgr. oder 12 Pfennige borgen, um die Pfennige der untern Zahl wegzunehmen, und man erhält alsdann 8 Pf. zum Reste. Für die Columne der Silbergroschen, wo nun 2 Sgr. in der obern Zahl übrig geblieben, muß man 1 Thaler oder 30 Silbergroschen von der Columne der Thaler borgen um 32 Silbergroschen zu erhalten, von welchen man 27 Sgr. abzieht, und 5 Sgr. zum Reste bekommt. Geht man nun zu der Columne der Thaler, so hat man die Ziffer der Einer als um 1 verringert zu betrachten, sonst aber nur die Operation wie bei einnamigen Zahlen weiter fortzuführen.

Das folgende Beispiel, wird dieses Verfahren vollends aufklären.

	19	Ctr.	25	℔.	13	Lth.	13	Gr.
	4	„	36	„	12	„	15	„
Rest . . .	14	Ctr.	99	℔.	—	Lth.	16	Gr.

Um die Subtraction in der Columne der Gräne auszuführen, muß man 1 Loth von der Columne der Lothe borgen, und sich erinnern, daß 1 Loth 18 Grän hat. Diese zähle man zu den 13 Grän der obern Zahl in Gedanken hinzu, so erhält man 31 Grän, von welchen man die 15 Grän abzieht und 16 Grän zum Reste bekommt *). Setzt man die Subtraction in den andern Columnen fort, und erinnert sich dabei, daß 1 Centner 110 ℔. hat, so erhält man den oben angegebenen Rest.

---

*) Statt dessen kann man auch die 15 Grän in Gedanken von den geborgten 18 Grän abziehen, und die übrig bleibenden 3 Grän zu den 13 Grän zulegen, wodurch man ebenfalls 16 Grän erhält. Wenn man auf diese Weise verfährt, so hat man es, bei den in Gedanken zu vollziehenden Additionen und Subtractionen immer, mit kleineren Zahlen zu thun.

Uebers.

Wir wollen noch ein Beiſpiel der Subtraction geben, ſowohl zur Uebung des Leſers, als auch um zu zeigen, wie man zu verfahren habe, wenn in den größeren der beiden gegebenen Zahlen einige oder alle Unterabtheilungen fehlen.

16 Ruthen — Fuß — Zoll — Linien
4 ′ 3 ′ 6 ′ 8 ′
Reſt ... 11 Ruthen 8 Fuß 5 Zoll 4 Linien

Um hier die Subtraction in der Columne der Linien auszuführen, kann man nur von der Columne der Ruthen borgen. Dies geſchieht wenn man 1 Ruthe in

11 Fuß und 11 Zoll und 12 Linien

zerlegt. Stellt man ſich nun dieſe Anzahlen von Fußen, Zollen und Linien in die gehörige Columnen geſetzt vor, und zieht nach einander jede untere Zahl von der obern ab, ſo erhält man die untergeſchriebenen Reſte. Alsdann geht man zur Columne der Ruthen über und betrachtet die Einer als um 1 verringert.

Von der Multiplication benannter Zahlen.

§ 108.

Wenn der Werth einer gegebenen Anzahl Dinge, welche von einerlei Art und von gleichem Werthe ſind, gefunden werden ſoll, und dieſer letztere Werth bekannt iſt, ſo braucht man nur, was leicht begreiflich, dieſen Werth ſo viel mal zu nehmen als Dinge vorhanden ſind, wobei es gleichgültig iſt, was es für Dinge ſind. Und hieraus iſt klar, daß das Product keineswegs von der Art der Einheiten des Multiplicators abhängt, ſondern daß ſeine Einheiten dieſelben wie die des Multiplicandus ſind, und der Multiplicator als eine abſtracte Zahl anzuſehen iſt. Dieſe Ueberlegung dient, um bei einer Multiplication benannter Zahlen diejenige zu beſtimmen, welche zum Multiplicator genommen werden muß.

Wenn z. B. der Meter eines gewiſſen Zeuges 19 Fran-

ten 25 Centimen koſtet, und der Werth eines Stückes, welches 37 Meter 24 Centimeter von dieſem Zeuge enthält, gefunden werden ſoll, ſo braucht man nur 19 Fr. 25 C. oder 19,25 Fr. mit 37,24 zu multipliciren, und das Product 716,87 Fr. oder 716 Fr. 87 C. iſt der geſuchte Werth.

Denn es leuchtet ein, daß der Werth des ganzen Stükkes eben ſo aus dem Werthe eines Meters zuſammengeſetzt iſt, wie ſeine Länge aus einem Meter. Da nun das ganze Stück den Meter 37 mal und $\frac{24}{100}$ des Meters enthält, ſo muß es 19 Fr. 25 C. 37 mal genommen und $\frac{24}{100}$ von dieſem Preiſe koſten, und es müſſen alſo 19,25 Fr. mit 37 und mit $\frac{24}{100}$ multiplicirt werden, was zuſammen geſchehen kann, wenn man 37,24 zum Multiplicator nimmt.

Die zu vollziehende Operation läßt ſich aus einem noch einfachern Geſichtspunkte betrachten. Sieht man nämlich 19 Fr. 25 C. als den Preis eines Centimeters von jenem Zeuge an, das heißt als den Werth der Einheit der letzten Unterabtheilung des Multiplicators, ſo iſt einleuchtend, daß der Werth des ganzen Stückes gefunden wird, wenn man 19,25 Fr. 3724 mal nimmt. Da aber die Zahl 3724 hundert mal ſo groß iſt als der eigentliche Multiplicator 37,24, ſo erhält man den geſuchten Werth, wenn man von dem gefundenen Producte den hundertſten Theil nimmt, oder darin zwei Decimalſtellen mehr abſondert.

Eine dritte Art endlich die Operation zu betrachten, ergiebt ſich wenn man erwägt, daß der Werth eines Meters 19,25 Fr. und folglich der einer Einheit der letzten Unterabtheilung des Multiplicators, oder eines Centimeters, der hundertſte Theil davon, alſo 0,1925 Fr. iſt, und daß man alſo den Werth von 37 Meter 24 Centimeter oder 3724 Centimeter erhält, wenn man 0,1925 Fr. mit 3724 multiplicirt.

§ 109.

Die Multiplication mehrnamiger Größen, in welchen die Unterabtheilungen nicht zehntheilig ſind, wird D

keine Schwierigkeiten machen, welche die Lehre von den Brüchen wohl inne haben. Man kann nämlich zuförderst den Multiplicator und Multiplicandus, vermittelst des Verhältnisses einer jeden Unterabtheilung zu der vorhergehenden, in einnamige gebrochene Zahlen verwandeln, und dann die Multiplication verrichten.

Wenn z. B. 15 Rthl. 12 Sgr. 4 ₰. gegeben sind, so verwandele man die Thaler in Silbergroschen dadurch, daß man sie mit 30 multiplicirt, und man hat nun 450 Silbergroschen zu den gegebenen 12 Sgr. hinzuzufügen, wodurch die gegebene Zahl in 462 Sgr. 4 ₰. verwandelt ist. Multiplicirt man ferner die 462 Silbergroschen mit 12, um sie in Pfennige zu verwandeln, so bekommt man 5544, und wenn man die gegebenen 4 ₰. dazu addirt, 5548 ₰. Da aber der Thaler 30 Silbergroschen und der Silbergroschen 12 Pfennige enthält, so enthält der Thaler 30 mal 12, oder 360 Pfennige, und folglich ist 1 Pfennig gleich $\frac{1}{360}$ des Thalers. Hieraus ergiebt sich, daß 5548 Pfennige $\frac{5548}{360}$ des Thalers sind.

Soll nun diese Zahl z. B. mit 7 Ruthen 4 Fuß multiplicirt werden, so verwandele man eben so 7 Ruthen 4 Fuß in $\frac{88}{12}$ Ruthen, und mache, nach der Regel des § 76, das Product der beiden Brüche $\frac{5548}{360}$ und $\frac{88}{12}$, welches $\frac{488224}{4320}$ ist. Die Einheit dieses Productes ist mit der Einheit des Multiplicandus von einerlei Art (§ 108) und man hat daher den Bruch $\frac{488224}{4320}$ in Thaler, Groschen und Pfennige zu verwandeln, was auf folgende Weise geschieht.

488224	4320
5622	113 Rthl. 0 Sgr. $5\frac{1}{3}$
13024	
64	
30	
1920	
12	
3840	
1920	
23040	
1440	

Man

Man dividirt den Zähler durch den Nenner und erhält 113 Ganze, welches die Thaler des gesuchten Resultates sind; sodann multiplicirt man den Rest, 64, mit 30, um ihn in Silbergroschen zu verwandeln; das Product, 1920, ist kleiner als der Divisor, und muß daher mit 12 multiplicirt werden um in Pfennige ausgedrückt zu werden, wodurch man 23040 erhält, welche, durch den Divisor 4320 dividirt, $5\frac{1440}{4320}$ Sgr. oder $5\frac{1}{3}$ Sgr. geben, die noch zu den 113 Thlrn. hinzuzufügen sind.

Diese letzte Operation, welche auf jedes Maaß angewandt werden kann, beruht darauf, daß jede gebrochene Zahl als eine angedeutete Division angesehen werden kann, welche ausführbar wird, wenn man den Zähler in immer kleinere und kleinere Theile verwandelt, wie wir dies in Betreff der Decimalbrüche (§ 95) gethan haben.

§ 110.

Wir wollen noch ein anderes Verfahren mittheilen, das bei der Multiplication mehrnamiger Zahlen häufig angewandt wird, weil es in der Ausübung öfters sehr bequem ist.

Es seyen 25 Thaler 18 Silbergroschen mit 16 zu multipliciren.

	25 Rthl. 18 Sgr.	
	16	
	150 Rthl.	
	25 „	
Product von 15 Sgr. . . .	8 „	
Product von 3 „ . . .	1 „	18 Sgr.
Total-Product . . .	409 Rthl.	18 Sgr.

Hier ist bloß der Multiplicandus mehrnamig; und es kommt nur darauf an ihn 16 mal zu nehmen, was, so weit es die Thaler betrifft, wie gewöhnlich verrichtet wird. Nun erwäge man, daß wenn man 1 zu dem Multiplicandus 25 hinzufügte, das Product grade um den Multiplicator 16 vermehrt werden würde, und daß es nur um die Hälfte dieses Multiplicators wachsen würde, wenn man nur die Hälfte eines Thalers zum Multiplicandus hinzufügte. Hiernach müßte

man alſo, wenn in dem Multiplicandus 15 Silbergroſchen hinter den Thalern ſtänden, 8 Einheiten, als die Hälfte des Multiplicators, zu dem Producte hinzufügen. Aber ſtatt 15 Silbergroſchen ſtehen 18 Sgr. im Multiplicandus; es ſind alſo noch 3 Silbergroſchen vorhanden, die in Rechnung gebracht werden müſſen. Da nun 3 Sgr. der 5te Theil von 15 Sgr. ſind, ſo vermehren ſie das Product auch nur um den 5ten Theil von dem, was die 15 Sgr. gegeben haben; man muß alſo den 5ten Theil von den vorher gefundenen 8 Thlrn. d. i. 1 Thlr. 18 Sgr., nehmen, und dies zu den ſchon gefundenen Partial-Producten hinzufügen, wonach man 409 Thlr. 18 Sgr. erhält.

§ 111.

Wenn man auf dieſe Weiſe die Unterabtheilungen, welche nächſt den Haupt-Einheiten im Multiplicandus vorkommen, in Theile zerlegt, die dieſe Haupt-Einheit und die ſich unter einander meſſen (ſolche Theile werden aliquote Theile genannt), ſo braucht man nur eben ſolche Theile von dem Multiplicator und von den ſchon gefundenen Producten zu nehmen, wie dies im folgenden Beiſpiele zu ſehen iſt.

			34	Rthl.	26	Sgr.	3⅓	Pf.
			18					
			272	Rthl.				
			34	″				
Für 15	Sgr.	. . . . .	9	″				
″ 6	″	. . . . .	3	″	18	Sgr.		
″ 5	″	. . . . .	3	″	—	″		
″ 1	″	. . . . .	—	″	18	″		
″ 3	Pf.	. . . . .	—	″	4	″	6	Pf.
″ 1	″	. . . . .	—	″	1	″	6	″
″ ⅓	″	. . . . .	—	″	—	″	6	″
Total Product			627	Rthl.	23	Sgr.	—	Pf.

Nachdem man das Product der Haupt-Einheiten des Multiplicandus mit jeder Ziffer des Multiplicators gebildet hat, verfährt man mit den Unterabtheilungen des Multiplicandus wie folgt:

Man zerlegt die 26 Silbergroſchen in 15 Sgr., 6 Sgr. und 5 Sgr.

Für die 15 Sgr. nimmt man die Hälfte des Multiplicators,

Für die 6 Sgr. das 5tel des Multiplicators,

Für die 5 Sgr. das 3tel von dem ſchon gefundenen Producte der 15 Sgr.

Da man nun zu den 3 Pfennigen kommt, welche der vierte Theil eines Silbergroſchens, und alſo der 20ſte Theil von 5 Sgr. ſind, ſo müßte man den 20ſten Theil von dem zuletzt gefundenen Producte nehmen, was beſchwerlich ſeyn könnte. Um dieſem Uebelſtande auszuweichen nimmt man zunächſt den 5ten Theil dieſes Productes, wodurch man das Product bildet, welches 1 Sgr. geben würde; ſodann nimmt man den 4ten Theil dieſes letzten Productes, welches man hierauf durchſtreicht, weil es nicht zum Total-Producte gehört, und nur dazu gedient hat, das eben gefundene Product von 3 Pfennigen zu bilden. Eben ſo erhält man das Product von $\frac{1}{3}$ Pfennig, indem man erſt das für 1 Pfennig aus dem von 3 Pfennigen gefundenen bildet, und jenes nachher ausſtreicht.

Es mag hier noch ein Beiſpiel von Ruthen und ihren Unterabtheilungen folgen.

				6	Ruthen	3	Fuß	5	Zoll	2 Linien
				9						
				54	Ruthen					
Für	3	Fuß	. . . .	2	′	3	Fuß			
′	1	′	. . . .	—	′	9	′			
′	3	Zoll	. . . .	—	′	2	′	3	Zoll	
′	1	′	. . . .	—	′	—	′	9	′	
′	1	′	. . . .	—	′	—	′	9	′	
′	2	Linien	. . .	—	′	—	′	1	′	6 Linien
Total-Product			. .	56	Ruthen	6	Fuß	10	Zoll	6 Linien

Es iſt hier das Product, welches 1 Fuß geben würde, gebildet worden, um das von 3 Zoll leichter zu erhalten, und das Product von 1 Zoll iſt zwei Mal hingeſchrieben worden, ſtatt mit einem Male das Product von 2 Zoll, als den 6ten Theil

eines Fußes, zu bilden, weil man dadurch leicht das Product von 2 Linien findet *).

§ 112.

Wenn der Multiplicator eine mehrnamige Zahl ist, so zerlegt man, eben so wie wir es vorher gethan haben, die Unterabtheilungen, welche er enthält, in aliquote Theile seiner Haupt-Einheit, und vollzieht die durch sie angezeigten Divisionen in den Multiplicandus. Eben in diesem Falle ist es wichtig, nach der gegebenen Aufgabe entschieden zu haben, welche von den beiden gegebenen Zahlen der Multiplicandus ist (§ 108). Denn die Art der Einheiten des gesuchten Productes bestimmt das Verhältniß der Unterabtheilungen, welche man nehmen muß, wenn man die Producte der aliquoten Theile mit dem Multiplicandus bildet; und bei welchem man sehr irren könnte, wenn man Multiplicator und Multiplicandus verwechselte, weil ihre Unterabtheilungen verschiedenen Gesetzen folgen, wenn diese beiden Zahlen nicht von derselben Art sind. Es sey z. B.

---

*) Man hätte aber auch auf folgende Weise rechnen können:

6 Ruthen 3 Fuß 5 Zoll 2 Linien
9
54 Ruthen

Für 3 Fuß	2	»	3 Fuß					
» 1 »	—	»	9					
» 3 Zoll	—	»	2	»	3 Zoll			
» 2 »	—	»	1	»	6	»		
» 2 Linien	—	»	—	»	1	»	6	Linien
	56 Ruthen	6 Fuß	10 Zoll	6 Linien				

Nachdem man nämlich den 6ten Theil des Productes, welches 1 Fuß geben würde, genommen hat, um das von 2 Zoll zu erhalten, muß man von diesem letztern, welches 1 Fuß 6 Zoll ist, den 12ten Theil nehmen, um das Product von 2 Linien zu bekommen. Dies kann aber hier dadurch sehr leicht geschehen, daß man die Fuß und Zoll in Zoll und Linien verwandelt, weil 1 Zoll von 1 Fuß, und 6 Linien von 6 Zoll der 12te Theil ist, und man hat daher auf der Stelle 1 Zoll 6 Linien. Uebers.

	793 Rthl.						
	9 Ctr.	67 ℔.	5 Lth.	$2\frac{1}{2}$ Qu.			
	7137 Rthl.						
Für 55 ℔.	396 „	15 Sgr.					
„ 11 „	79 „	9 „			704		
„ 1 „	7 „	6 „	$3\frac{3}{11}$ Pf.		64	192	
„ 4 Lth.	— „	27 „	$\frac{9}{22}$ „		32	288	
„ 1 „	— „	6 „	$9\frac{9}{88}$ „		8	72	
„ 2 Qu. . . .	— „	3 „	$4\frac{97}{176}$ „		4	388	
„ $\frac{1}{2}$ „ . . .	— „	— „	$10\frac{97}{704}$ „		1	97	
	7621 Rthl.	8 Sgr.	$3\frac{333}{704}$ Pf.			$\frac{1037}{704}$	

In diesem Beispiele nimmt man:

Für 55 ℔., die Hälfte des Multiplicandus,
für 11 ℔., $\frac{1}{5}$ des vorhergehenden Productes,
für 1 ℔., $\frac{1}{11}$ des vorhergehenden Productes,
für 4 Lth., $\frac{1}{8}$ des vorhergehenden Productes,
für 1 Lth., $\frac{1}{4}$ des vorhergehenden Productes,
für 2 Qu., $\frac{1}{2}$ des vorhergehenden Productes,
für $\frac{1}{2}$ Qu., $\frac{1}{4}$ des vorhergehenden Productes,

Die Brüche, welche in den Partial-Producten vorkommen, werden nach dem in § 96 angegebenen zweiten Verfahren addirt, das man hier, ohne erst Versuche anstellen zu dürfen, anwenden kann, weil aus dem Gange der Rechnung klar ist, daß der größte Nenner alle übrigen enthält, oder mit andern Worten, daß der größte Nenner zugleich der kleinste Haupt-Nenner ist. Man findet auf diese Weise $\frac{1037}{704}$ oder $1\frac{333}{704}$ Pf. für die Summe dieser Brüche, und, wenn man die Addition fortsetzt, das Total-Product.

§ 113.

Wenn beide, der Multiplicandus und der Multiplicator, mehrnamige Zahlen sind, so macht man zuerst das Product der Haupt-Einheiten des Multiplicandus mit denen des Multiplicators; sodann nimmt man bloß von den Haupt-Einheiten des Multiplicators die aliquoten Theile, in welche sich die Unterabtheilungen des Multiplicandus zerlegen lassen, und

hierauf nimmt man ferner von dem gesammten Multiplicandus die aliquoten Theile, in welche die Unterabtheilungen des Multiplicators zerlegt sind.

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens einzusehen, braucht man nur zu erwägen, daß das gesuchte Product aus drei Theilen bestehen muß, nämlich aus dem Producte der Haupt-Einheiten des Multiplicandus mit denen des Multiplicators, aus dem der Unterabtheilungen des Multiplicandus mit den Haupt-Einheiten des Multiplicators, und endlich aus dem Producte des gesammten Multiplicandus mit den Unterabtheilungen des Multiplicators. Denn man kann die in Rede stehende Operation auf eine Multiplication zweier gemischten Zahlen zurückführen, und wenn man dann z. B. $8\frac{2}{3}$ mit $6\frac{5}{7}$ zu multipliciren hätte, so würde das Product aus 8 und aus $\frac{2}{3}$, jedes 6 mal und $\frac{5}{7}$ mal genommen, zusammengesetzt werden.

§ 114.

Das folgende Beispiel wird das Verfahren deutlich machen.

	84 Rthl.	11 Sgr.	$3\frac{1}{3}$ Pf.				
	15 Ruthen	4 Fuß	6 Zoll	8 Linien			
	420 Rthl.						
	84 „						
Für 10 Sgr.	5 „						
„ 1 „	— „	15 Sgr.					
„ 3 Pf.	— „	3 „	9 Pf.				
„ 1 „	— „	1 „	3 „				
„ $\frac{1}{3}$ „	— „	— „	5 „	648			
„ 4 Fuß	28 „	3 „	$9\frac{1}{9}$ „		72	72	
„ 6 Zoll	3 „	15 „	$5\frac{23}{36}$ „		18	414	
„ 1 „	— „	17 „	$6\frac{203}{216}$ „				
„ 4 Linien . . .	— „	5 „	$10\frac{203}{648}$ „		1	203	
„ 4 „	— „	5 „	$10\frac{203}{648}$ „		1	203	
	1297 Rthl.	20 Sgr.	$1\frac{61}{162}$ Pf.			$\frac{892}{648}$ oder $\frac{223}{162}$	

Nachdem die Haupt-Einheiten des Multiplicandus und Multiplicators mit einander multiplicirt worden, sind zuerst von den 15 Haupt-Einheiten des Multiplicators die aliquoten Theile genommen, in welche die 11 Sgr. 3 Pf. des Multipli-

candus zerlegt sind, und dann ist $\frac{1}{5}$ des Hülfs-Productes von 1 Sgr. dazu gesetzt. Ferner sind von dem gesammten Multiplicandus diejenigen aliquoten Theile genommen, welche 4 Fuß 6 Zoll 8 Linien vom Multiplicator sind, und es ist dabei das Hülfsproduct von 1 Zoll gebildet, um zu den Linien überzugehen. Die Addition ist dann wie gewöhnlich verrichtet worden.

§ 115.

Man läßt öfters die Brüche weg, welche die Rechnung beschwerlich machen; aber dadurch kann das Resultat in der letzten Unterabtheilung um einige Einheiten unrichtig werden. Sowohl dieser Fehler als die Beschwerlichkeit, welche die Addition der gewöhnlichen Brüche mit sich führt, wird vermieden, wenn man den Rest, welchen, bei der Bildung eines Partial-Productes, die letzte Unterabtheilung des vorhergehenden Productes übrig läßt, in Zehntel verwandelt; und wenn nicht zehn solcher Producte vorkommen, so ist man sicher, daß das Resultat der Rechnung bis auf die Einheiten der letzten Unterabtheilung richtig ist.

Wenn z. B. gefragt wird, wie viel man für $44\frac{13}{16}$ Ellen Zeug zu bezahlen habe, von welchem eine Elle 6 Thlr. 12 Sgr. 11 Sgr. kostet,

		6 Rthl.	12 Sgr.	11 Sgr.		
		$44\frac{13}{16}$				
		264 Rthl.				
Für	10 Sgr.	14 ‘	20 Sgr.			
‘	2 ‘	2 ‘	28 ‘			
‘	6 Sgr.	— ‘	22 ‘			
‘	3 ‘	— ‘	11 ‘			
‘	2 ‘	— ‘	7 ‘	4	Sgr.	
‘	$\frac{1}{2}$ Elle	3 ‘	6 ‘	5,5	‘	
‘	$\frac{1}{4}$ ‘	1 ‘	18 ‘	2,7	‘	
‘	$\frac{1}{16}$ ‘	— ‘	12 ‘	0,6	‘	
	Total-Product . .	288 Rthl.	5 Sgr.	0,8	Sgr.	

so verfährt man mit dem Multiplicandus wie in den vorhergehenden Beispielen. Die $\frac{13}{16}$ des Multiplicators werden in

$\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{10}$ zerlegt, und daher nimmt man die Hälfte vom gesammten Multiplicandus, dann, für das $\frac{1}{2}$, die Hälfte von diesem Producte, und endlich, für das $\frac{1}{10}$, das $\frac{1}{2}$ vom vorhergehenden Producte. In dem Total-Producte streicht man die 8 Zehntel der Pfennige aus, weil sie wegen der weggelassenen Hundertel u. s. w. nicht richtig zu seyn brauchen.

§ 116.

Alles was wir über die Multiplication mehrnamiger Zahlen gesagt haben, läßt sich folgendermaßen in eine Regel zusammen fassen. Man multiplicire zuförderst die Haupt-Einheiten des Multiplicandus mit denen des Multiplicators, zerlege die Unterabtheilungen des ersten in aliquote Theile seiner Haupt-Einheit oder vorhergehender aliquoter Theile, und nehme dieselben Theile von den Haupt-Einheiten des Multiplicators. Dann zerlege man die Unterabtheilungen des lezten in aliquote Theile seiner Haupt-Einheit oder vorhergehender aliquoter Theile, und nehme dieselben Theile von dem gesammten Multiplicandus. Ist ein solcher Theil in Beziehung auf denjenigen, von welchem er genommen werden soll, zu klein um bequem aufgefunden zu werden, so erleichtere man sich die Rechnung dadurch, daß man einen dazwischen liegenden aliquoten Theil annimmt um ein Hülfs-Product zu bilden, aus dem man den gesuchten aliquoten Theil ableitet, dann aber die Ziffern des Hülfs-Productes durchstreicht, damit man es nicht in der Addition der Partial-Producte, welche das Total-Product bilden, aufnehme.

Von der Division benannter Zahlen.

§ 117.

Die Division wird unter andern angewendet um alle Aufgaben zu lösen, welche mit der folgenden von einerlei Art

sind. **Es ist der Werth einer gewissen Anzahl Dinge von einem und demselben Werthe gegeben, und es soll dieser letztgenannte Werth gefunden werden.** Da nämlich der gegebene Werth das Product des Werthes eines solchen Dinges mit der gegebenen Anzahl dieser Dinge ist (§ 108), so findet man den einen Factor, welcher der unbekannte Werth ist, wenn man das Product, oder den gegebenen Werth der ganzen Anzahl, durch den andern Factor, d. i. durch diese gegebene Anzahl, dividirt (§ 36).

Nehmen wir z. B. an, daß man für 19 Meter 12 Centimeter oder 19,12 Meter von einem gewissen Zeuge 320 Franken 26 Centimen oder 320,26 Franken bezahlt habe, und daß nach dem Preise eines Meters gefragt würde; so muß man, um diesen Preis zu finden, 320,26 Fr. durch 19,12 dividiren, wodurch man 16,75 Fr. oder 16 Fr. 75 Cent. erhält.

Man kann aber auch durch folgende Ueberlegung zu dem Resultate gelangen. Verwandelt man nämlich die 19 Met. 12 Centimet. in 1912 Centimeter und dividirt 320,26 Fr. durch 1912 so hat man den Preis eines Centimeters, den man dann mit 100 multipliciren muß um den Preis eines Meters zu haben. Es ist aber klar, daß wenn man statt 1912 den hundert mal kleinern Divisor 19,12 nimmt, der Quotient hundert mal größer und also der gesuchte Werth ist. Wenn man daher 320,26 Fr. durch 19,12 dividirt, so findet man 16,75 als den Werth eines Meters.

§ 118.

In der folgenden Aufgabe sind der Divisor und der Dividendus von einerlei Art, der Quotient aber besteht aus andern Einheiten.

Der Kilogramme einer gewissen Waare kostet 14,5 Franken; es wird gefragt, wie viel Kilogramme man für 529,35 Franken erhalten werde.

Es ist klar, daß die gesuchte Zahl eben so aus einem Kilogramme (ihrer Einheit) zusammengesetzt ist, wie 529,35 Fr. aus

14,5 Fr., dem Preiſe eines Kilogrammes. Wenn man alſo 529,35 durch 14,5 dividirt, ſo iſt der Quotient 36,50689.... die Anzahl der Kilogramme und ihrer Unterabtheilungen.

§ 119.

Wenn man mit mehrnamigen Zahlen rechnet, deren Unterabtheilungen nicht nach einem und demſelben Geſetze beſtimmt ſind, ſo darf man nicht unterlaſſen vor der Diviſion zu überlegen, welches die Einheit des Quotienten ſeyn muß, weil hiervon die Verwandlung der Reſte in die Unterabtheilungen dieſer Einheit abhängt. Eine aufmerkſame Betrachtung der Aufgabe wird in dieſer Hinſicht keinen Zweifel übrig laſſen, beſonders dann nicht, wenn man den Dividendus als ein Product betrachtet, und danach beſtimmt, welches der Multiplicandus und welches der Multiplicator geweſen ſeyn mußte.

Es werden ſich alsdann zwei Fälle zeigen können, nämlich: es ſind entweder Dividendus und Diviſor von verſchiedener Art, und dann muß der Quotient mit dem Dividendus von einerlei Art ſeyn (wovon wir im § 117 ein Beiſpiel gehabt haben), oder Dividendus und Diviſor ſind von einerlei Art, und dann muß der Quotient von einer andern ſeyn (wovon wir im vor. § ein Beiſpiel gehabt haben). Da die Diviſion mit mehrnamigen Zahlen in dem letztern Falle einfacher iſt als in dem erſtern, ſo wollen wir uns zunächſt mit dieſem letzten Falle beſchäftigen.

§ 120.

Der Preis für eine Ruthe einer gewiſſen Arbeit iſt 36 Thlr. 23 Sgr. 3 Pf.; es wird gefragt, wie viel man für 1689 Thlr. 26 Sgr. verlangen kann. Hier iſt der Dividendus, 1689 Thlr. 26 Sgr., eben ſo aus 36 Thlr. 23 Sgr. 3 Pf. zuſammengeſetzt, wie die Zahl, welche die verlangte Arbeit mißt, aus der Ruthe und ihren Unterabtheilungen zuſammengeſetzt iſt.

Um nun dieſe Zahl zu finden, erwäge man, daß ihr Werth ſich nicht ändern kann, wenn man Dividendus und

Divisor in Theile von einerlei Werth verwandelt, weil der Quotient zweier Brüche, die denselben Nenner haben, dem Quotienten ihrer Zähler gleich ist. Verwandelt man aber beide, den Dividendus und den Divisor, in Pfennige, welches die niedrigsten Unterabtheilungen sind, die sie enthalten, so macht man dadurch diese beiden Zahlen einnamig.

Der Dividendus 1689 Thlr. 26 Sgr. giebt 608352 Pf., und der Divisor 36 Thlr. 23 Sgr. 3 Pf. giebt 13239 Pf.; und nun betrachte man den Dividendus als aus Ruthen bestehend, und den Divisor als eine abstracte Zahl; denn, wenn die Ruthe nur einen Pfennig kostete, so würde man 608352 Ruthen bekommen, und da sie 13239 Pfennige kostet, so kann man nur den 13239sten Theil dieser Anzahl Ruthen verlangen. Man setze also an:

608352	13239
78792	45 Ruthen 11 Fuß 5 Zoll — $\frac{2700}{13239}$ Linien
12597	
12	
25194	
12597	
151164	
18774	
5535	
12	
11070	
5535	
66420	
225	
12	
450	
225	
2700	

Nachdem man die Haupt-Einheiten des Quotienten erhalten hat, multiplicirt man den Rest 12597 Ruthen mit 12, um ihn in Fuß zu verwandeln, was 151164 giebt. Man

ſetzt ſodann die Diviſion fort, ſchreibt den Quotienten als Fuße hin, und multiplicirt den Reſt 5535 mit 12 um ihn in Zolle zu verwandeln; das Product 66420 dividirt man durch den Diviſor, und erhält dadurch die Zolle des Quotienten. Den Reſt multiplicirt man wieder mit 12, damit er in Linien verwandelt werde, und da das Product 2700 kleiner iſt als der Diviſor und keine Unterabtheilungen weiter gebräuchlich ſind, ſo endigt der Quotient mit dem Bruche $\frac{2700}{13239}$, den man noch auf ſeine kleinſte Benennung bringt. Das End-Reſultat der Operation iſt alſo 45 Ruthen 11 Fuß 5 Zoll — $\frac{300}{1471}$ Linien.

Das Verfahren bleibt im Weſentlichen daſſelbe, wenn die gegebenen Zahlen und der Quotient auch aus jeder andern Art von Einheiten beſtehen.

§ 121.

Wenn der Quotient mit dem Dividendus von einerlei Art ſeyn muß, und wenn außerdem der Diviſor eine einnamige Zahl iſt, ſo läßt ſich die Operation wie die im § 109 ausführen.

Z. B. Es haben 27 Loth eines Metalles 169 Thlr. 11 Sgr. 4 Pf. gekoſtet, und es wird gefragt wie viel ein Loth koſtet.

169 Rthl. 11 Sgr. 4 Pf.	27
7	6 Rthl. 8 Sgr. $2\frac{10}{27}$ Pf.
30	
210	
11	
221	
5	
12	
60	
4	
64	
10	

Nachdem man 6 Thlr. als den erſten Theil des Quotienten gefunden hat, verwandelt man den Reſt 7 in Silber-

groschen und fügt die 11 Sgr. vom Dividendus hinzu. Sodann dividirt man die 221 Sgr. durch 27, wodurch man 8 Sgr. zum Quotienten und 5 zum Reste erhält, welchen letztern man mit 12 multiplicirt um ihn in Pfennige zu verwandeln, uud dann die 4 Pf. des Dividendus dazu addirt. Die so erhaltenen 64 Pf. dividirt man durch den Divisor 27, wodurch man $2\frac{10}{27}$ Pf. zum Quotienten bekommt. Das vollständige Resultat ist daher 6 Thlr. 8 Sgr. $2\frac{10}{27}$ Pf.

§ 122.

Wenn endlich der Dividendus und der Divisor mehrnamige Zahlen und von verschiedener Art sind, muß man den letztern in einen Bruch verwandeln, wie wir es im § 109 gethan haben, sodann, nach der im § 79 gegebenen Regel, den Dividendus mit dem Nenner des Divisors multipliciren, und das Product, welches im allgemeinen eine mehrnamige Zahl ist, durch den Zähler des Divisors, der nothwendigerweise einnamig ist, dividiren.

Z. B. 36 Ruthen 5 Fuß 6 Zoll 8 Linien einer gewissen Arbeit sind mit 1374 Thlr. 12 Sgr. 4 Pf. bezahlt worden; man soll den Preis einer Ruthe finden.

Wenn der Divisor in die niedrigsten Unterabtheilungen seiner Haupt-Einheit verwandelt wird, so ergeben sich 63008 Linien, und da die Ruthe 1728 Linien hat, so ist der Divisor gleich $\frac{63008}{1728}$ Ruthen.

Multiplicirt man nun, nach dem im § 111 angegebenen Verfahren, den Dividendus 1374 Thlr. 12 Sgr. 4 Pf. mit 1728, so findet man 2374982 Thlr. 12 Sgr., und braucht nun bloß diese mehrnamige Zahl durch die einnamige Zahl 63008 (nach dem vor. §) zu dividiren, wodurch man den Quotienten 37 Thlr. 20 Sgr. $9\frac{1101}{1969}$ Pf. erhält.

§ 123.

Da der Nenner des Bruches, in welchen man den Divisor verwandelt, der Anzahl der in der Haupt-Einheit enthaltenen Einheiten der niedrigsten Unterabtheilung gleich

Wir wollen nun noch annehmen, es werde gefragt, in wie viel Zeit derselbe Courier 22 Meilen zurücklegen wird.

Wüßte man die Zeit, in welcher er eine Meile zurücklegt, so würde man sie 22 mal nehmen, und zum Resultate die gesuchte Anzahl Stunden bekommen. Da der Courier 3 Stunden nöthig hat um 4 Meilen zu machen, so wird er nur $\frac{1}{4}$ dieser Zeit oder $\frac{3}{4}$ Stunden brauchen um eine Meile zurückzulegen. Multiplicirt man also diese Zahl mit 22, so findet man $\frac{66}{4}$ oder $16\frac{1}{2}$ Stunde.

§ 127.

Jede von den vorhergehenden Aufgaben haben wir besonders zergliedert und dadurch die unbekannte Größe gefunden; aber in allen diesen Aufgaben hängen die bekannten und die unbekannten Zahlen auf eine Weise von einander ab, die hier näher untersucht werden soll.

Zu dem Ende wollen wir die erste Aufgabe wieder vornehmen, in welcher es darauf ankommt den Preis von 18 Ellen Tuch zu finden, wenn 13 Ellen von diesem Tuche mit 130 Thaler bezahlt worden sind.

Es leuchtet ein, daß die für ein Stück von diesem Zeuge zu bezahlende Summe doppelt so groß wird, wenn dieses Stück eine doppelt so große Anzahl Ellen enthält, daß, wenn diese Anzahl drei mal so groß wird, der Preis verdreifacht wird, u. s. f.; daß ferner für die Hälfte oder für die $\frac{1}{2}$ des Stückes auch nur die Hälfte oder zwei Drittel von dem Preise des ganzen Stückes zu bezahlen sind.

In Folge dieser Betrachtungen, deren Richtigkeit jeder, der nur die Bedeutung der Ausdrücke versteht, ohne Schwierigkeit zugeben wird, sieht man ein, daß, wenn man zwei Stücke Tuch von derselben Art hat, der Preis des zweiten den des ersten so viel mal enthalten muß als die Länge des zweiten die des ersten enthält. Und diesen Zusammenhang drückt man dadurch aus, daß man sagt: die Preise stehen mit

den

den Längen in Proportion, oder haben daſſelbe Verhältniß zu einander, oder auch die Preiſe verhalten ſich wie die Längen.

Dieſes Beiſpiel mag uns dienen den Sinn einiger Ausdrücke zu erklären, die häufig vorkommen.

§ 128.

Das Verhältniß der Längen iſt die ganze oder gebrochene Zahl, welche angiebt wie viel mal die eine dieſer Längen die andere enthält. Wenn das erſte Stück 4, und das zweite 8 Ellen lang iſt, ſo iſt 2 das Verhältniß des erſten zum zweiten, weil 8 die 4 zwei mal enthält. In unſerm obigen Beiſpiele war das erſte Stück 13, und das zweite 18 Ellen lang; das Verhältniß des erſten zum zweiten iſt daher $\frac{13}{18}$ oder $1\frac{5}{18}$. Ueberhaupt iſt das Verhältniß zweier Zahlen der Quotient der einen durch die andere.

Da die Preiſe daſſelbe Verhältniß zu einander haben wie die Längen, ſo muß 180, als der Preis des zweiten Stückes, dividirt durch 130, als den Preis des erſten Stükkes, $\frac{18}{13}$ zum Quotienten geben. Und dies findet wirklich Statt; denn wenn man $\frac{180}{130}$ auf ſeine kleinſte Benennung bringt, findet man $\frac{18}{13}$.

Die vier Zahlen 13, 18, 130, 180, in der Ordnung, in welcher ſie hier ſtehen, ſind ſo beſchaffen, daß die zweite eben ſo viel mal die erſte enthält, als die vierte die dritte, und bilden in dieſer Ordnung das, was eine Proportion genannt wird.

Die Zahlen 13, 18, 130 und 180 ſelbſt, heißen die Glieder der Proportion.

Man ſagt auch: eine Proportion iſt die Zuſammenſtellung zweier gleichen Verhältniſſe.

Es iſt nöthig zu bemerken, daß ein Verhältniß ſich nicht ändert, wenn man ſeine beiden Glieder mit einer und derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt. Dies wird einleuchtend, wenn man erwägt, daß ein Verhältniß der Quotient einer

Diviſion iſt, und alſo immer als ein Bruch dargeſtellt werden kann. So iſt das Verhältniß $\frac{18}{13}$ dem Verhältniſſe $\frac{180}{130}$ gleich.

Dieſelben Betrachtungen laſſen ſich auch auf das zweite Beiſpiel anwenden. Der Courier, welcher 4 Meilen in 3 Stunden zurücklegt, wird einen doppelten Weg in einer doppelten Zeit, einen dreifachen Weg in einer dreifachen Zeit zurücklegen; und ſo müſſen denn auch die 11 Stunden, als die Zahl, welche die Zeit ausdrückt, die dieſer Courier braucht um $14\frac{2}{3}$ oder $\frac{44}{3}$ Meilen zu machen, die 3 Stunden, als die Zahl, welche die Zeit angiebt, die er braucht um 4 Meilen zu machen, eben ſo oft enthalten, als $\frac{44}{3}$ die 4 enthält. Die vier Zahlen: 4, $\frac{44}{3}$, 3, 11 ſtehen alſo in Proportion, und wenn man $\frac{44}{3}$ durch 4 dividirt, ſo erhält man wirklich $\frac{44}{12}$ oder $\frac{11}{3}$. Es wird nunmehr leicht ſeyn in jedem Falle zu erkennen, ob vier gegebene Zahlen in Proportion ſtehen.

§ 129.

Um anzudeuten, daß die vier Zahlen 13, 18, 130 und 180 in Proportion ſtehen, ſchreibt man ſie wie folgt:

$$13 : 18 = 130 : 180$$

und ſpricht dies aus: Es verhält ſich 13 zu 18 wie 130 zu 180. Dies ſoll ſo viel heißen als: 13 iſt derſelbe Theil von 18 als 130 von 180, oder: 13 iſt eben ſo viel mal in 18 enthalten wie 130 in 180, oder endlich: das Verhältniß von 13 zu 18 iſt dem Verhältniß von 130 zu 180 gleich.

Das erſte Glied eines Verhältniſſes heißt das Vorderglied, und das zweite das Hinterglie In einer Proportion giebt es alſo zwei Vorder- und zwei Hinterglieder, nämlich ein Vorderglied des erſten und ein Vorderglied des zweiten Verhältniſſes, ein Hinterglied des erſten und ein Hinterglied des zweiten Verhältniſſes. In der Proportion $13 : 18 = 130 : 180$ ſind 13 und 130 die Vorderglieder, und 18 und 180 die Hinterglieder.

Wir werden das Hinterglied immer zum Zähler und das

Vorderglied zum Nenner des Bruches annehmen, der das Verhältniß ausdrückt.

§ 130.

Um ſich zu überzeugen, daß die vier Zahlen 13, 18, 130 und 180 in Proportion ſtehen, muß man nachſehen, ob die Brüche $\frac{18}{13}$ und $\frac{180}{130}$ einander gleich ſind, und zu dem Ende den zweiten dieſer Brüche auf ſeine kleinſte Benennung bringen. Man kann aber auch die Richtigkeit der Proportion auf folgende Weiſe prüfen. Wenn nämlich die beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{180}{130}$ einander gleich ſeyn ſollen, ſo müſſen ſie, nachdem man ſie auf gleiche Benennung gebracht hat, auch gleiche Zähler haben, und es muß folglich 18 mit 130 multiplicirt dasſelbe Product geben als 180 mit 13 multiplicirt. Dies findet hier wirklich Statt, und da dieſe Ueberlegung von den beſondern Werthen der Zahlen unabhängig iſt, ſo folgt, daß **wenn vier Zahlen in Proportion ſtehen, das Product der erſten und letzten, oder der äußern Glieder, dem Producte der zweiten und dritten Zahl, oder der mittlern Glieder gleich iſt.**

Es iſt hieraus zugleich klar, daß wenn vier Zahlen nicht in Proportion ſtehen, ſie die eben angegebene Beſchaffenheit nicht haben können. Denn da der Bruch, welcher das erſte Verhältniß ausdrückt, dem, der das zweite angiebt, dann nicht gleich iſt, ſo kann der Zähler des einen dem des andern, wenn man beide auf dieſelbe Benennung bringt, nicht gleich werden.

§ 131.

Die erſte Folgerung, die ſich aus dem Vorhergehenden ziehen läßt, beſteht darin, daß man die Ordnung der Glieder einer Proportion ändern kann, wenn nur in der neuen Ordnung das Product der äußern Glieder dem der mittlern gleich iſt. In der Proportion

$$13 : 18 = 130 : 180$$

kann man folgende Verſetzungen vornehmen:

13 : 130 = 18 : 180
180 : 130 = 18 : 13
180 : 18 = 130 : 13
18 : 13 = 180 : 130
18 : 180 = 13 : 130
130 : 13 = 180 : 18
130 : 180 = 13 : 18;

denn in jeder dieſer neuen Anordnungen bleiben das Product der äußern und das Product der mittlern Glieder aus denſelben Factoren gebildet. Die zweite Ordnung, welche durch Verwechſelung der mittlern Glieder hervorgebracht worden, iſt eine von denjenigen Verſetzungen, welche am häufigſten angewendet werden *).

§ 132.

Es läßt ſich hieraus folgern, daß man die beiden Vorderglieder oder die beiden Hinterglieder einer Proportion mit einer und derſelben Zahl multipliciren oder dividiren kann, ohne die Proportion zu ſtören. Denn wenn man die mittlern Glieder verwechſelt, ſo bildet man aus den beiden Vordergliedern das erſte, und aus den beiden Hintergliedern das zweite Verhältniß. Wenn man z. B. die Proportion

55 : 21 = 165 : 63

*) Wir glauben, hier anmerken zu müſſen, daß die Proportion 13 : 130 = 18 : 180 ſich unmittelbar aus der Löſung der Aufgabe des § 126 unter dieſer Form hätte aufſtellen laſſen. Denn man kann den Werth einer Elle Tuch auf zweierlei Weiſe erhalten, nämlich: wenn man den Preis eines Stückes von 13 Ellen durch 13, oder wenn man den eines Stückes von 18 Ellen durch 18 dividirt. Hieraus folgt alſo, daß der Preis des erſten Stückes ſo viel mal 13 enthalten müſſe, als der Preis des zweiten 18 enthält, und man hat demnach 13 : 130 = 18 : 180. Man kann auf dieſelbe Weiſe die zweite Aufgabe deſſelben §en, ſo wie alle Aufgaben dieſer Art behandeln, und daraus die Proportionen herleiten. Wir haben aber den im § 126 aufgeſtellten Geſichtspunkt vorgezogen, weil er bloß darauf führt gleichartige Größen mit einander zu vergleichen, während man hier die Preiſe, d. i. Summen Geldes, mit Ellen vergleicht, welches Längen-Maaße ſind, was nur geſchehen kann, wenn man beide Größen als abſtracte Zahlen betrachtet. Verf.

hat, so erhält man durch Verwechselung der mittlern Glieder

$$55 : 165 = 21 : 63,$$

und da man nun die beiden Glieder des ersten Verhältnisses durch 5 dividiren kann (§ 128), so hat man auch

$$11 : 33 = 21 : 63,$$

welche Proportion, durch nochmalige Versetzung der mittlern Glieder,

$$11 : 21 = 33 : 63$$

giebt. Diese Proportion unterscheidet sich von der vorgelegten nur darin, daß die beiden Vorderglieder durch 5 dividirt sind.

§ 133.

Da das Product der äußern Glieder dem der mittlern gleich ist, so kann man das eine für das andere nehmen; und da ferner das Product der äußern Glieder durch ein äußeres Glied dividirt zum Quotienten das andere äußere Glied giebt, so findet man, wenn man das Product der mittlern Glieder durch ein äußeres Glied dividirt, das andere äußere Glied. Aus demselben Grunde erhält man, wenn man das Product der äußern Glieder durch ein mittleres Glied dividirt, das andere mittlere Glied.

Man kann daher jedes Glied einer Proportion finden, wenn die übrigen drei Glieder derselben bekannt sind; denn das gesuchte Glied kann doch nur eins von den äußern oder eins von den mittlern Gliedern seyn.

Die Aufgabe des § 126 läßt sich nach der ersten hier gegebenen Regel lösen. Denn sobald man eingesehen hat, daß die Preise der beiden Stücke Tuch mit der Anzahl der Ellen, welche in einem jeden enthalten sind, in Proportion stehen, so hat man

$$13 : 18 = 130 : x,$$

wenn man den Buchstaben x an die Stelle des gesuchten Preises des Stückes von 18 Ellen setzt. Und nun findet man diesen Preis, welcher eins der äußern Glieder ist, wenn man die beiden mittlern Glieder, 18 und 130, mit einander multi-

plicirt, und das Product 2340 durch das bekannte äußere Glied 13 dividirt, wodurch man 180 zum Resultate erhält.

Das Verfahren, durch welches man aus drei gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte findet, wird die Regel de Tri genannt. Die Verfasser der meisten Rechenbücher unterscheiden mehrere Arten der Regel de Tri, was aber für Diejenigen ohne eigentlichen Nutzen ist, die das Wesen der Proportion wohl gefaßt haben und den Sinn der Aufgabe verstehen. Einige Anwendungen werden dies klar machen.

§ 134.

Ein Arbeiter hat eine Arbeit von 217,5 Fuß in 9 Tagen gemacht; es fragt sich wie viel Zeit er brauchen würde um 423,9 Fuß zu Stande zu bringen, unter der Voraussezzung, daß er immer auf dieselbe Weise arbeitet.

Die unbekannte Zahl in dieser Aufgabe ist eine Anzahl Tage, welche die, zur Anfertigung der 217,5 Fuß angewandten, 9 Tage so viel mal enthalten muß als 423,9 die 217,5 enthält. Man hat daher die Proportion $217{,}5 : 423{,}9 = 9 : x$, aus welcher man für x, 17,54.... findet.

§ 135.

Die ganze Schwierigkeit, die man in diesen Aufgaben finden kann, besteht darin wie die Proportion anzusetzen ist. Folgende Regeln führen sicher dazu, sie in allen Fällen richtig aufzustellen.

Unter den vier Gliedern, welche die Proportion bilden müssen, sind immer zwei von einerlei Art und zwei andere ebenfalls von einerlei Art, welche letztere aber von der erstern Art verschieden ist. In dem vorigen Beispiele drücken zwei Glieder Fuße und zwei andere Tage aus. Man unterscheide daher zuförderst diese beiden Arten der Größen wohl von einander, und wenn dies geschehen ist, so muß nothwendigerweise der Quotient des größern Gliedes der zweiten Art, dividirt durch das kleinere Glied derselben Art, dem Quotienten des größern Gliedes der ersten Art dividirt durch das kleinere

Glied derselben Art, gleich seyn, woraus sich folgende Proportion ergiebt:

Es verhält sich
das kleinere Glied der ersten Art
zu
dem größern Gliede dieser Art,
wie
das kleinere Glied der zweiten Art
zu
dem größern Gliede dieser Art.

Auf das vorhergehende Beispiel angewandt giebt diese Regel unmittelbar $217{,}5 : 423{,}9 = 9 : x$; denn das unbekannte Glied muß größer als 9 seyn, weil desto mehr Tage erfoderlich sind je mehr Arbeit gemacht werden soll.

§ 136.

Wenn aufgegeben wird, die Zeit zu finden, in welcher 27 Arbeiter eine Arbeit zu Stande bringen, zu der 15 Arbeiter, welche eben so schnell arbeiten, 18 Tage brauchen, so sieht man leicht, daß desto weniger Zeit erfoderlich ist je mehr Arbeiter da sind, und umgekehrt. Hier findet allerdings noch immer eine Proportion Statt, aber in einer umgekehrten Ordnung; denn wenn z. B. die Anzahl der zuletzt genannten Arbeiter drei mal so groß wäre, als die Anzahl der zuerst genannten, so würden Jene nur ein Drittel von der Zeit brauchen, welche Diese nöthig haben. Es muß also hier die erste Anzahl Tage eben so viel mal die zweite Anzahl enthalten, als die zweite Anzahl Arbeiter die erste Anzahl enthält.

Da die Ordnung, nach welcher diese Größen in einander enthalten sind, die umgekehrte von derjenigen ist, nach welcher sie in der Aufgabe auf einander folgen, so sagt man die beiden Zahlen, welche die Menge der Arbeiter angeben, stehen mit den Zahlen, welche die Tage ausdrücken, in umge-

kehrtem Verhältniß *). Vergleicht man die beiden ersten und dann die beiden letzten Zahlen in der Ordnung, nach welcher sie in der Aufgabe auf einander folgen, so ergiebt sich, daß das Verhältniß der ersten 3 oder $\frac{3}{1}$, und das der letzten $\frac{1}{2}$, also der umgekehrte Bruch von $\frac{3}{1}$, ist. Man sieht auch leicht ein, daß ein Verhältniß umgekehrt wird, wenn man den Bruch, durch welchen es ausgedrückt ist, umkehrt, weil man dadurch das Vorderglied an die Stelle des Hintergliedes und das Hinterglied an die Stelle des Vordergliedes setzt. So ist $\frac{1}{2}$ oder 2 : 3 das umgekehrte Verhältniß von $\frac{2}{1}$ oder 3 : 2.

Die Regel des vorigen §en vereinfacht diese Betrachtungen sehr. Denn wenn man die beiden Zahlen, welche die Anzahl der Arbeiter ausdrücken, für die Größen der ersten Art, die beiden Zahlen aber, welche die Tage bezeichnen, für die Größen der zweiten Art nimmt, und sie nach ihrer Größe ordnet, so hat man die Proportion

$$15 : 27 = x : 18$$

woraus man x gleich 10 findet **).

§ 137.

Es folgen hier noch einige Aufgaben zur Uebung des Lesers.

---

*) Ein nicht umgekehrtes Verhältniß wird im Gegensatze ein gerades Verhältniß genannt. In dieser Beziehung würde man bei der im § 127 als Beispiel gebrauchten Aufgabe sagen: die Preise stehen mit den Längen in gradem Verhältniß. Ueberſ.

**) Es dürfte nicht überflüssig seyn hier anzumerken, daß die obige Aufgabe und alle ihr ähnliche auch ohne eine Proportion anzuwenden gelöſ't werden können, eben so wie die im § 133 mit Hülfe der Proportion aufgelöſ'ten Aufgabe durch eine einfache Ueberlegung ohne Anwendung einer Proportion im § 126 gelöſ't worden ist.

Wüßte man nämlich die Zeit, die ein Arbeiter gebraucht um die in Rede stehende Arbeit auszuführen, so würde man offenbar nur den 27sten Theil davon zu nehmen brauchen, um die gesuchte Zeit zu finden. Da nun 15 Arbeiter 18 Tage lang arbeiten müssen, so muß ein Arbeiter 15 mal so viel Zeit, d. i. 270 Tage arbeiten, um die Arbeit zu Stande zu bringen, und nimmt man davon den 27sten Theil oder dividirt 270 durch 27, so findet man 10 für die gesuchte Anzahl Tage. Ueberſ.

1ſtens. Jemand hat 3575 Thlr. zu 5 pro Cent jährlicher Zinſen in eine Handlung gelegt. Es wird gefragt, wie viel die Zinſen von dieſem ſeinem Kapitale nach Ablauf eines Jahres betragen werden.

Der Ausdruck 5 pro Cent jährlicher Zinſen (man pflegt 5 p. C. oder 5% zu ſchreiben) bedeutet ſoviel als: eine Summe von 100 Thlrn. trägt oder bringt dem Eigenthümer nach Verlauf eines Jahres 5 Thlr. Nimmt man daher die beiden Capitale für die Größen der erſten und die Zinſen für die Größen der zweiten Art, ſo hat man

$$100 : 3575 = 5 : x,$$

eine Proportion, welche ſich, zufolge des § 132, auf

$$20 : 3575 = 1 : x$$

reducirt. Dividirt man nun noch die beiden Glieder des erſten Verhältniſſes durch 5, ſo findet man

$$4 : 715 = 1 : x$$

woraus x gleich $\frac{715}{4}$ Thlr. oder 178 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf. ſich ergiebt.

Man kann dieſe Aufgabe auch dadurch auflöſen, daß man erwägt, daß 5 der zwanzigſte Theil von 100 iſt, und daß man folglich die Zinſen einer beliebigen Summe nach dieſem Zinsfuße findet, wenn man $\frac{1}{20}$ dieſer Summe nimmt. Nun iſt $\frac{1}{20}$ von 3575 Thlr. gleich 178 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf., welches Reſultat mit dem vorher gefundenen übereinſtimmt.

2tens. Ein Kaufmann hat einem andern verſprochen ihm nach Ablauf eines Jahres 800 Thlr. zu zahlen. Der letztere überläßt den von dem erſtern ausgeſtellten Schuldſchein oder Wechſel einem Banquier acht Monate vor Ablauf der feſtgeſetzten Friſt, weil er den Zahlungstag nicht abwarten kann. Es fragt ſich nun wie groß die baare Zahlung iſt, die der Banquier leiſten ſoll, wenn der Zinsfuß 6% fürs Jahr iſt.

Da der Banquier aus ſeiner Kaſſe eine Summe Geldes hergiebt, die er erſt nach acht Monaten wieder erhalten ſoll, ſo muß er in der Zahlung, die ihm alsdann geleiſtet wird,

auch die Zinsen seines vorgestreckten Kapitals finden. Da nun die Zinsen von 100 Thlrn. auf ein Jahr 6 Thlr. betragen, so sind die Zinsen von 100 Thlrn. auf 8 Monate $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ von 6 Thlrn.; also trägt eine auf 8 Monate ausgeliehene Summe von 100 Thlrn. 4 Thlr. Zinsen, d. i. Derjenige, welcher sie geborgt, muß 104 Thlr. zurück bezahlen. Da nun ferner die von dem Banquier vorzustreckende Summe als ein solches Darlehn zu betrachten ist, so hat man die Proportion

$$104 \text{ Rtl.} : 100 \text{ Rtl.} = 800 : x,$$

woraus man $769\frac{3}{13}$ Thlr. oder 769 Thlr. 6 Sgr. $11\frac{1}{13}$ Pf. für den Werth von x, d. i. für die Summe findet, welche der Banquier baar zu bezahlen hat *).

Von der zusammengesetzten Regel de Tri.

§ 138.

Die Regel de Tri läßt sich auch noch auf Aufgaben anwenden, in welchen die Beziehung der gesuchten Größe zu der ihr gleichartigen gegebenen von mehrern Umständen abhängt, welche mit einander verbunden werden müssen. Sie wird

*) Der Abzug, welchen der Banquier macht, indem er statt 800 Thlr. nur 769 Thlr. 6 Sgr. $11\frac{1}{13}$ Pf. bezahlt, und der sich also auf 30 Thlr. 23 Sgr. $\frac{12}{13}$ Pf. beläuft, wird Rabatt oder Interusurium genannt. Gewöhnlich werden aber die Zinsen von der ganzen Summe, auf welche der Wechsel lautet, in Abzug gebracht, welches streng genommen nicht richtig ist. In unserm Beispiele, würde auf diese Weise, da 100 Thlr. auf 8 Monate 4 Thlr. Zinsen tragen, der Abzug sich auf 32 Thlr. belaufen, und die baare Zahlung nur 768 Thlr. betragen. In diesem Falle wird der Abzug Disconto genannt.

Man pflegt auch den, nach der oben angegebenen Regel berechneten, Rabatt Rabatt auf Hundert, und den, nach der hier angegebenen Weise berechneten, Rabatt in Hundert zu nennen. Verf.

Nach dem, was früher bemerkt worden ist, wird man finden, daß auch die Aufgaben dieses Sen sich ohne Proportionen auflösen lassen. Uebers.

dann zusammengesetzte Regel de Tri genannt. Folgende Beispiele werden diese Anwendung deutlich machen.

Es wird gefragt wie viel Meilen ein Reisender, welcher täglich 10 Stunden lang geht, in 17 Tagen zurücklegen wird, wenn man weiß, daß dieser Reisende, als er täglich 7 Stunden lang ging, 29 Tage brauchte, um 112 Meilen zurückzulegen.

Diese Aufgabe kann auf zweierlei Weise gelöst werden; die nächstfolgende Art giebt Gelegenheit zur Anwendung der zusammengesetzten Regel de Tri.

Die Anzahl der Meilen, welche der Reisende in beiden Fällen zurücklegt, hängt von zwei Umständen ab, nämlich von der Anzahl der Tage, welche er auf die ganze Reise verwendet, und von der Anzahl Stunden, welche er jeden Tag geht.

Wenn man vorläufig auf den letzten Umstand gar nicht achtet, und annimmt, daß die Anzahl der Stunden in beiden Fällen dieselbe wäre, so würde die Aufgabe folgendermaßen lauten: **Ein Reisender hat in 29 Tagen 112 Meilen gemacht, wie viel Meilen wird er in 17 Tagen zurücklegen?** und man würde dann die Proportion haben

$$29\ \text{T.} : 17\ \text{T.} = 112 : x.$$

Das vierte Glied wäre hier gleich 112 multiplicirt mit 17 und dividirt durch 29, oder $\frac{1904}{29}$ Meilen.

Um nunmehr die Verschiedenheit der Anzahl Stunden zu berücksichtigen, während welcher der Reisende täglich auf dem Wege ist, wird man fragen müssen: **Wenn ein Reisender, der täglich 7 Stunden lang gegangen ist, während einer gewissen Anzahl Tage, $\frac{1904}{29}$ Meilen gemacht hat, wie viel Meilen wird dieser Reisende in derselben Zeit machen, wenn er täglich 10 Stunden lang geht?** Dies führt zu folgender Proportion

$$7\ \text{St.} : 10\ \text{St.} = \tfrac{1904}{29} : x,$$

deren viertes Glied 93,793 ... für die gesuchte Anzahl Meilen giebt.

Die zweite Art die Aufgabe zu lösen ergiebt sich aus

folgender Betrachtung. Der Reisende, welcher 29 Tage und täglich 7 Stunden lang ging, war überhaupt 203 Stunden lang auf der Reise; und wenn er 17 Tage und täglich 10 Stunden lang geht, so ist er überhaupt 170 Stunden lang unterweges. Die Aufgabe ist dadurch auf die Proportion

$$203 \text{ St.} : 170 \text{ St.} = 112 : x$$

zurückgeführt, durch welche sich die Länge des Weges, den der Reisende in 170 Stunden zurücklegen muß, aus demjenigen finden läßt, welchen er in 203 Stunden gemacht hat *).

§ 139.

Wenn 9 Arbeiter, welche täglich 8 Stunden arbeiten, 24 Tage gebraucht haben um einen Graben zu machen, der 65 Fuß lang, 13 Fuß breit und 5 Fuß tief ist; wie viel Tage werden 71 eben so starke Arbeiter, die täglich 11 Stunden arbeiten, gebrauchen um einen Graben zu ziehen, der 327 Fuß lang, 18 Fuß breit und 7 Fuß tief ist?

Diese dem Anscheine nach sehr verwickelte Aufgabe läßt sich gleichfalls durch die Regel de Tri lösen.

Wenn nämlich in den beiden in der Aufgabe genannten Fällen Alles, bis auf die Anzahl der Tage und die Anzahl der Arbeiter, gleich wäre, so würde sie sich darauf reduciren zu finden, wie viel Tage 71 Leute gebrauchen um eine Arbeit zu Stande zu bringen, welche 9 Leute in 24 Tagen ausgeführt haben, und man hätte alsdann (§ 135)

$$9 : 71 = x : 24.$$

Anstatt aber jetzt die Anzahl Tage hieraus zu berechnen, wollen wir die zu verrichtende Multiplication nur andeuten (wie im § 70), und die Zahl, durch welche dividirt werden muß,

*) Nachdem die Aufgabe darauf zurückgebracht ist, aus dem Umstande daß der Reisende in 203 Stunden 112 Meilen gemacht hat, die Länge des Weges zu finden, welchen er in 170 Stunden zurücklegen wird, läßt sie sich wie die zweite Aufgabe in § 126 behandeln, und erfodert also ebenfalls nicht nothwendig die Anwendung von Proportionen. Uebers.

als Nenner darunter schreiben. Wir haben auf diese Weise für die Anzahl x der Tage

$$\frac{24 \text{ mit } 9}{71}.$$

Aber die zuerst genannten Arbeiter arbeiten täglich nur 8 Stunden, während die andern täglich 11 Stunden arbeiten; diese brauchen daher um so weniger Tage, und man hat

$$8 : 11 = x : \frac{24 \text{ mit } 9}{71},$$

woraus man findet, daß die Anzahl der Tage, mit Rücksicht auf diesen Umstand,

$$\frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8}{71 \text{ mit } 11}$$

ist, und dies ist also die Anzahl der Tage, welche die, täglich 11 Stunden beschäftigten, Arbeiter brauchen, um den zuerst genannten Graben zu ziehen.

Da der zweite Graben länger als der erste ist, so sind auch um so mehr Tage zu dem zweiten als zu dem ersten erfoderlich; man hat demnach

$$65 : 327 = \frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8}{71 \text{ mit } 11} : x,$$

und die Anzahl Tage ist, mit Rücksicht auf diesen neuen Umstand,

$$\frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65}.$$

Nimmt man jetzt auf die Breite Rücksicht, welche bei den beiden Gräben verschieden ist, so hat man

$$13 : 18 = \frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65} : x,$$

und die jetzt gesuchte Anzahl Tage ist also

$$\frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327 \text{ mit } 18}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65 \text{ mit } 13}.$$

Da aber auch die Tiefen verschieden sind, so hat man endlich

$$5 : 7 = \frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327 \text{ mit } 18}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65 \text{ mit } 13} : x,$$

und die Anzahl Tage, welche aus allen gegebenen Umständen zusammen genommen hervorgeht, ist daher

$$\frac{24 \text{ mit } 9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327 \text{ mit } 18 \text{ mit } 7}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65 \text{ mit } 13 \text{ mit } 5}.$$

Führt man die angedeuteten Multiplicationen aus, und verrichtet dann die Division, so gelangt man zu dem gesuchten Resultate, welches $21\frac{1902831}{3809725}$ Tage ist *).

§ 140.

Diese Zahl ist offenbar gleich 24, multiplicirt mit der gebrochenen Zahl

$$\frac{9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327 \text{ mit } 18 \text{ mit } 7}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65 \text{ mit } 13 \text{ mit } 5},$$

und diese letztere, welche das Verhältniß der gegebenen Anzahl Tage zu der gesuchten Anzahl Tage ausdrückt, ist wiederum das Product folgender Brüche

$$\frac{9}{71}, \frac{8}{11}, \frac{327}{65}, \frac{18}{13} \text{ und } \frac{7}{5}.$$

Geht man nun zu der Aufgabe zurück, um die Bedeutungen der Zahlen aufzusuchen, so findet man, daß $\frac{9}{71}$ das umgekehrte Verhältniß der Arbeiter, welches nach der Aufgabe 9 : 71 ist, ausdrückt, daß $\frac{8}{11}$ das umgekehrte Verhältniß der Stunden angiebt, und daß $\frac{327}{65}$, $\frac{18}{13}$ und $\frac{7}{5}$ die graden Verhältnisse der Längen, Breiten und Tiefen beider Gräben sind. Es folgt hieraus, daß das Verhältniß der gegebenen Anzahl Tage zu der gesuchten Anzahl Tage dem Producte aus allen graden und allen umgekehrten Verhältnissen gleich ist, welche aus der Vergleichung der, auf jeden in der Aufgabe gegebenen Umstand sich beziehenden, Glieder hervorgehen.

Die Aufgabe läßt sich also auf eine sehr einfache Weise auflösen, wenn man zuförderst jedes dieser Verhältnisse durch

*) Aus dem, was vorher angemerkt worden, wird man einsehen, daß auch diese Aufgabe ohne Proportionen gelöst werden kann. Ueberhaupt ist die Anwendung der Proportionen in der Arithmetik niemals unumgänglich nöthig. Uebers.

einen Bruch ausdrückt; denn multiplicirt man all diese Brüche mit einander, so erhält man einen Bruch, welcher das Verhältniß derjenigen gegebenen Größe, welche mit der gesuchten von einerlei Art ist, zu dieser gesuchten ausdrückt.

Dieser letztere Bruch, welcher das Product aller Verhältnisse ist, die in der Aufgabe vorkommen, hat zum Zähler das Product aller Hinterglieder, und zum Nenner das Product aller Vorderglieder. Ein Verhältniß, welches auf diese Weise aus der Multiplication mehrerer anderer hervorgeht, wird ein zusammengesetztes Verhältniß genannt.

Setzt man die gebrochene Größe

$$\frac{9 \text{ mit } 8 \text{ mit } 327 \text{ mit } 18 \text{ mit } 7}{71 \text{ mit } 11 \text{ mit } 65 \text{ mit } 13 \text{ mit } 5}$$

in Form eines Verhältnisses an, so erhält man, vermittelst der gegebenen Anzahl Tage, die Proportion

71 mit 11 mit 65 mit 13 mit 5 : 9 mit 8 mit 327 mit 18 mit 7 = 24 : x,

welche in ähnlichen Fällen nachzubilden keine Schwierigkeit haben wird *).

---

*) Anstatt zur Lösung der Aufgabe diese Proportion aufzustellen, pflegt man den Ansatz wie folgt zu machen

		24
71	:	9
11	:	8
65	:	327
13	:	18
5	:	7

und ihn alsdann Säulenaufsatz zu nennen. (Insbesondere heißt dieser Ansatz, wenn das Vorderglied eines jeden der unter einander stehenden Verhältnisse mit dem Hintergliede des nächstvorhergehenden einerlei Benennung hat, Kettenaufsatz). Die Ausrechnung der gesuchten Zahl geschieht nun grade so wie oben; man multiplicirt nämlich alle Zahlen einer jeden Columne mit einander und dividirt das Product der zweiten Columne durch das der ersten. Da der Quotient einer Division nicht geändert wird, wenn man Divisor und Dividendus mit einer und derselben Zahl dividirt oder multiplicirt, so kann man, wenn sich gleiche Factoren in beiden Columnen befinden, diese gegen einander wegstreichen, was man, wie bei Brüchen, he-

Von der Gesellschafts-Rechnung.

§ 141.

Der Zweck dieser Rechnung ist, eine Zahl so zu theilen, daß die Theile ein gegebenes Verhältniß zu einander haben. Man

---

ben nennt; und aus demselben Grunde kann man auch jede gemischte Zahl, die in einer Columne vorkommt, einrichten und nur den Zähler des entstehenden Bruches in diese Columne setzen, was eben so viel ist, als ob man die gemischte Zahl mit dem Nenner multiplicirt hätte (§ 54), wenn man dagegen diesen Nenner in die andere Columne bringt.

Beispiel.

Wie viel betragen die Zinsen eines auf 9 Monate und 11 Tage ausgeliehenen Kapitals von 3617 Thlr. 10 Sgr. zu $5\frac{0}{0}$ fürs Jahr?

Wenn man 10 Sgr. durch $\frac{1}{3}$ Thlr. und 11 Tage durch $\frac{11}{30}$ Monat ausdrückt, so ist der Säulenaufsatz:

		$3617\frac{1}{3}$	Rthl.
100 Rthl.	:	5	Rthl.
12 Mon.	:	$9\frac{11}{30}$	Mon.

Schafft man die Nenner aus der Columne rechter Hand weg, so hat man

3	:	3~~61~~ ~~1~~	10852
100	:	5	
12	:	~~9~~	281
30			

und hebt man die Factoren 30 und 5 durch 5, und die Factoren 12 und 10852 durch 4, so ergiebt sich

3	:	~~3617~~ ~~1~~ ~~10852~~	2713
100	:	~~5~~ 1	
3 ~~12~~	:	~~9~~ 281	
6 ~~30~~			
5400	:	762353	141 Rthl. 5 Sgr. $3\frac{8}{15}$ Pf.
		22235	
		6353	
		953	
		30	
		28590	
		1590	
		12	
		19080	
		2880	

n wird in dem folgenden Beispiele den Grund der Be-
nung finden.

Drei Kaufleute haben sich zu einem Handlungsgeschäfte
einigt; der erste hat 25000 Thlr., der zweite 18000 Thlr.
d der dritte 42000 Thlr. eingelegt. Sie trennen sich wie-
: und wollen nun den gemeinschaftlichen Gewinn, der sich
f 57225 Thlr. beläuft, unter sich theilen. Es wird gefragt
e viel jeder auf seinen Theil zu erhalten habe.

Um diese Aufgabe zu lösen, erwäge man, daß der Ge
inn eines Jeden in dem ganzen Gewinn so viel mal enthal-
n seyn muß, als seine Einlage in der Summe der Einlagen

---

raus durch Multiplication der Zahlen einer jeden Columne und durch Di-
sion der Producte das obige Resultat hervorgeht.

Daß man den Ansatz nicht mehrere Male hinzuschreiben braucht, was
r nur zu mehrerer Deutlichkeit geschehen ist, versteht sich von selbst.

Wir wollen diese Gelegenheit benutzen um einen Rechnungsvortheil
zeigen, der sich bei der Division benannter Zahlen öfters anbringen läßt.
ıstatt nämlich bei der obigen Division den Rest 953, durch Multiplication
t 30, in Silbergroschen zu verwandeln und das Product durch 5400 zu
ıldiren, kann man den Divisor 5400 durch 30 dividiren und den unge-
derten Rest 953 durch den Quotienten 180 dividiren, weil $\frac{953 \text{ mit } 30}{5400}$,
ich $\frac{953}{180}$ ist. Die Division kommt dann folgendermaßen zu stehen:

Divisor	Dividendus	Quotient
5400	762353	141 Rtl. 5 Sgr. $3\frac{3}{15}$ pf.
	22235	
30) 180	6353	
	953	
12) 15	953	
	53	
	53	
	8	

n Rest der Division von 953 durch 180, nämlich 53, welchen wir mit
: hätten multipliciren müssen um ihn in Pfennige zu verwandeln, haben
r unverändert gelassen, dagegen haben wir den Divisor 180 durch 12
ldirt und den Quotienten 15 zum Divisor genommen.

Dieses Verfahren, welches sich auch bei der im § 109 ausgeführten
ivision hätte in Anwendung bringen lassen, gewährt in so fern einen Vor-
il, als man es dabei mit kleinern Zahlen zu thun hat. Uebers.

oder dem ganzen Fonds enthalten ist. Denn Derjenige, welcher für sich allein z. B. die Hälfte oder den dritten Theil zu diesem Fonds beigetragen hätte, würde offenbar auf die Hälfte oder den dritten Theil des Gewinnes ein Recht haben. In unserer Aufgabe ist die Summe aller Einlagen 85000 Thlr., wovon die einzelnen Einlagen respective

$$\frac{25000}{85000},\ \frac{18000}{85000}\ \text{und}\ \frac{42000}{85000}$$

sind; und wenn man den gesammten Gewinn von 57225 mit diesen Brüchen multiplicirt, erhält man den Gewinn, welcher zu jeder Einlage gehört. Uebrigens leuchtet ein, daß die Summe aller Gewinn-Antheile dem gesammten Gewinne gleich seyn muß, weil die Summe obiger Brüche, ein Bruch dessen Zähler und Nenner einander gleich sind, nothwendigerweise die Einheit ist.

Die vorher angegebenen Operationen führen zu folgenden Proportionen

85000 : 25000 = 57225 : Gewinn des 1sten Kaufm.,
85000 : 18000 = 57225 : Gewinn des 2ten Kaufm.,
85000 : 42000 = 57225 : Gewinn des 3ten Kaufm.,

welche ausgesprochen werden können:

die ganze Einlage : einer einzelnen Einlage = der ganze Gewinn : einem einzelnen Gewinne.

Vereinfacht oder hebt man die Glieder des ersten Verhältnisses dieser Proportionen, so hat man

85 : 25 = 57225 : Gewinn des 1sten oder $16830\frac{75}{85}$ Rthl.
85 : 18 = 57225 : Gewinn des 2ten oder $12118\frac{20}{85}$ Rthl.
85 : 42 = 57225 : Gewinn des 3ten oder $28275\frac{75}{85}$ Rthl.

Wenn alle Einlagen gleich groß wären, würde sich die Operation darauf reduciren, den ganzen Gewinn durch die Anzahl der Einlagen zu dividiren; und unsere Aufgabe läßt sich darauf zurückführen, wenn man sich vorstellt, daß die gesammte Einlage in 85 einzelne Einlagen oder Actien von 1000 Thlrn. eingetheilt ist. Der Gewinn einer jeden dieser Einlagen muß offenbar der 85ste Theil des gesammten Gewinnes seyn, und es bleibt also nur noch übrig diesen Theil nach

einander mit 25, 18 und 42 zu multipliciren, da man die Einlagen von 25000 Thlrn., 18000 Thlrn. und 42000 Thlrn. als aus 25 Actien, aus 18 Actien und aus 42 Actien bestehend, betrachten kann.

Bei dieser Gelegenheit kann man sich die kaufmännischen Ausdrücke Kapital und Dividende merken, welche die gesammte Einlage und den zu vertheilenden Gewinn bedeuten.

Die folgende Aufgabe hat mit der eben aufgelöst'en viel Aehnlichkeit.

§ 142.

Eine Erbschaft von 67250 Thlrn. soll unter drei Erben so getheilt werden, daß der Antheil des zweiten $\frac{2}{5}$ von dem des ersten, und der Antheil des dritten $\frac{7}{8}$ von dem des zweiten betrage.

Es ist einleuchtend, daß der Antheil des dritten von dem Antheil des ersten $\frac{7}{8}$ von $\frac{2}{5}$ oder $\frac{14}{40}$ oder $\frac{7}{20}$ seyn wird. Die drei gesuchten Antheile verhalten sich also zu einander wie die Zahlen 1, $\frac{2}{5}$ und $\frac{7}{20}$. Bringt man diese Zahlen auf einerlei Benennung, so findet man $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$ und $\frac{7}{20}$, und hat nun die drei ganzen Zahlen 20, 8 und 7, welche den erstern proportional sind. Da aber ihre Summe 35 ist, so ist leicht einzusehen, daß, wenn man drei Theile nimmt, welche durch die Brüche $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$ und $\frac{7}{35}$ ausgedrückt werden, diese Theile das verlangte Verhältniß zu einander haben werden. Die Aufgabe wird also gelöst, wenn man $\frac{20}{35}$, dann $\frac{8}{35}$ und endlich $\frac{7}{35}$ von 67250 Thlrn. nimmt, welches die, den Erben nach der vorgeschriebenen Vertheilung zukommenden, Summen giebt, nämlich:

$38428\frac{20}{35}$ Rthl., $15371\frac{15}{35}$ Rthl. und 13450 Rthl.

§ 143.

Zwei Springbrunnen, von welchen der erste, wenn er allein fließt, einen gewissen Behälter in $2\frac{1}{2}$ Stunden und der zweite, wenn er allein fließt, denselben Behälter in $3\frac{3}{4}$ Stunden füllt, fließen zu gleicher Zeit; man will wissen, in wie viel Zeit der Behälter nun gefüllt seyn wird.

Sucht man welchen Theil des Behälters der erste Springbrunnen in einer gegebenen Zeit z. B. in einer Stunde füllt, so ist leicht einzusehen, daß man bloß, wenn der Inhalt des Behälters zur Einheit angenommen wird, 1 durch $2\frac{1}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ zu dividiren braucht, was $\frac{2}{5}$ als den gesuchten Theil giebt. Dividirt man 1 durch $3\frac{3}{4}$ oder $\frac{15}{4}$ so erhält man eben so $\frac{4}{15}$ für denjenigen Theil des Behälters, welchen der zweite Springbrunnen in einer Stunde füllt. Da nun beide Springbrunnen zu gleicher Zeit fließen, so werden sie in einer Stunde $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{15}$, oder $\frac{10}{10}$ des Behälters füllen. Dividirt man also 1, oder den Inhalt des Behälters, durch $\frac{10}{10}$, so hat man die Anzahl Stunden, welche erforderlich sind, damit der Behälter auf diese Weise gefüllt werde, und man findet so $\frac{10}{10}$ oder $1\frac{1}{2}$ Stunde.

Die Verfasser von Rechenbüchern haben diese Aufgaben sehr vervielfältigt und dabei mancherlei Veränderungen angebracht. Sie haben auch für die bei der Auflösung gebrauchten Verfahrungsarten Regeln aufgestellt; aber alle diese Vorschriften sind wenigstens unnütz, weil eine Aufgabe dieser Art von Demjenigen, welcher die aus den Bedingungen der Aufgabe fließenden Folgerungen zu entwickeln weiß, immer mit Leichtigkeit gelöst wird, besonders dann, wenn er sich der Hülfe der Algebra bedienen kann. Deshalb werden wir uns auch nicht länger hierbei aufhalten.

§ 144.

Nach Art der Proportionen, welche aus vier Zahlen bestehen, von denen die beiden ersten so viel mal in einander enthalten sind als die beiden letzten, hat man auch die Zusammenstellung von vier Zahlen, wie 2, 7, 9, 14, in Betrachtung gezogen, von welchen die zweite um eben so viel die erste übersteigt als die vierte die dritte. Diese Zusammenstellung, welche man Aequidifferenz nennen kann, hat eine merkwürdige Eigenschaft, welche der der Proportionen ähnlich ist, nämlich:

die Summe der äußeren Glieder, 2 und 14, ist der der mittlern, 7 und 9, gleich *).

Um diese Eigenschaft zu beweisen, erwäge man, daß das zweite Glied dem ersten Gliede und der Differenz, und das vierte Glied dem dritten Gliede und der Differenz gleich ist; woraus denn folgt, daß die Summe der äußern Glieder oder des ersten und vierten Gliedes dem ersten und dritten Gliede sammt der Differenz gleich ist. Eben so ist die Summe der mittlern Glieder oder des zweiten und dritten Gliedes gleich dem ersten Gliede nebst der Differenz und dem dritten Gliede. Da nun diese beiden Summen aus denselben Theilen zusammengesetzt sind, so sind sie einander gleich.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß das zweite und vierte Glied größer als das erste und dritte Glied seyen. Es kann aber auch, wie bei den Zahlen 8, 5, 15, 12, das Gegentheil Statt finden. Alsdann ist das zweite Glied gleich dem ersten weniger der Differenz, und das vierte gleich dem dritten weniger der Differenz und man kann auf ähnliche Art wie vorher beweisen, daß auch hier die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern ist.

*) Die Alten haben die Lehre von den Proportionen und die Operationen der Arithmetik scharf von einander getrennt. Euclid trägt diese Lehre im fünften Buche seiner Elemente vor, und wendet die Proportionen auf Linien an, woher es vermuthlich gekommen ist, daß sie in der Folge den Namen geometrische Proportionen erhalten haben, und daß man der Aequidifferenz, mit der man sich erst viel später beschäftigte, den Namen arithmetische Proportion gegeben hat. Diese Benennungen sind aber nicht gut gewählt; denn das Wort Proportion hat nach dem Sprachgebrauche eine bestimmte Bedeutung, die keineswegs zu der der Aequidifferenz paßt, und übrigens ist die Proportion, welche man geometrisch nennt nicht weniger arithmetisch, als die, welcher man ausschließlich diese Benennung gegeben hat. Lagrange hat in seinen Leçons à l'école normale den Sprachgebrauch in dieser Hinsicht berichtigt, und wir sind seinem Beispiele gefolgt.

Die Aequidifferenz, oder die Zusammenstellung von vier ägut differenten Zahlen, oder endlich die arithmetische Proportion wird wie folgt geschrieben:

$$2 \div 7 = 9 \div 14$$

Verf.

Wir werden dieſe Lehre von den Aequidifferenzen nicht weiter verfolgen, weil ſie jetzt nicht gebraucht wird.

Von der Alligations-Rechnung.

§ 145.

Wir wollen die Alligations-Rechnung nicht übergehen, deren Zweck es iſt, den mittlern Werth mehrerer Dinge von derſelben Art aber von verſchiedenem Werthe zu finden. Die folgenden Beiſpiele werden ſie hinlänglich kennen lehren.

Ein Kaufmann kauft mehrere Sorten Weine, nämlich

130 Quart zu 10 Sgr.
75 „ „ 15 „
231 „ „ 12 „
27 „ „ 20 „

die er unter einander miſcht; es fragt ſich wie hoch ihm ein Quart der Miſchung zu ſtehen kommt.

Es iſt leicht einzuſehen, daß man nur zu berechnen braucht, wie viel ihm die ganze Miſchung koſtet und wie viel Quart ſie enthält; und daß man dann nur nöthig hat das erſte Reſultat durch das zweite zu dividiren um den geſuchten Preis zu finden. Nun betragen

130	Quart	zu	10 Sgr.	1300 Sgr.
75	„	„	15 „	1125 „
231	„	„	12 „	2772 „
27	„	„	20 „	540 „
Alſo koſten 463	Quart	. . . . .		5737 Sgr.

Dividirt man nun 5737 Sgr. durch 463, ſo iſt der Quotient, 12,39... Sgr., der Preis von einem Quart der Miſchung *).

*) Die Alligations-Rechnung, welche auch Vermiſchungs-Rechnung genannt wird, findet bei Gold- und Silber-Berechnungen häufige Anwendung. Da nämlich reines Gold und Silber zu weiche Metalle ſind, als daß man ſie zu Münzen oder Geräthſchaften anwenden könnte, ſo giebt man ihnen einen Zuſatz, der gewöhnlich aus Kupfer beſteht. Das gemiſchte

§ 146.

Man bedient ſich auch der vorhergehenden Rechnungsart um ein mittleres Reſultat aus mehrern, durch die Erfahrung oder Beobachtung erhaltenen nicht mit einander übereinſtim-

---

Metall nennt man legirtes Gold oder legirtes Silber; eine Mark reines Gold oder Silber heißt eine feine Mark, und eine Mark von dem legirten Gold oder Silber heißt eine rauhe Mark. Die Menge des feinen Goldes oder Silbers, das in einer gewiſſen Menge legirten Goldes oder Silbers enthalten iſt, heißt der Gehalt (auch wohl Feingehalt).

In Frankreich giebt man den Gehalt durch einen Decimalbruch an. Man ſagt daher der Gehalt der franzöſiſchen Silber-Münzen ſey 0,9, und verſteht darunter, daß ſie aus legirtem Silber geprägt ſind, welches aus neun Zehntel Silber und einem Zehntel Kupfer beſteht.

Im Preußiſchen ſoll der Gehalt nach Gränen angegeben werden, von welchen 288 eine Mark ausmachen (§ 101). Man ſagt demnach der Gehalt der Thaler-Stücke ſey 216 Grän, und verſteht darunter, ſie ſeyen aus legirtem Silber geprägt, welches aus $\frac{216}{288}$ oder $\frac{3}{4}$ Silber und $\frac{72}{288}$ oder $\frac{1}{4}$ Kupfer beſteht, oder von welchem eine jede rauhe Mark 216 Grän feines Silber und 72 Grän Kupfer enthält. Früherhin beſtimmte man den Gehalt des Goldes nach Karaten zu 12 Grän, von welchen alſo 24 eine Mark ausmachen, und den Gehalt des Silbers nach Lothen zu 18 Grän, von welchen alſo 16 eine Mark bilden, und dieſe Art den Gehalt anzugeben iſt auch jetzt noch im Gebrauche. 21karätig bedeutet alſo ſo viel als, in einer rauhen Mark ſind 21 Karat feines Gold und 3 Karat Zuſatz, und 12löthig ſo viel als, in einer rauhen Mark ſind 12 Loth Silber und 4 Loth Kupfer.

Wenn mehrere Sorten legirten Metalles, z. B. 5 Mrk. 12 Lth. zwölflöthiges und 17 Mrk. 4 Lth. achtlöthiges Silber, zuſammengeſchmolzen werden, ſo entſteht die Frage: welches iſt der Gehalt der Miſchung? Man ſieht leicht ein, daß die Aufgabe in die Alligations-Rechnung gehört, und daher auf folgende Weiſe gelöſ't werden kann.

5	Mrk.	12	Lſ.	12löthiges Silber enthalten	69	Lſ.	feines Silber.
17	„	4	„	8 „ „ „	138	„	„ „
23	Mrk.	—	Lſ.	Miſchung enthalten	207	Lſ.	feines Silber.

Da nun die Miſchung 23 Mrk. wiegt und 207 Loth feines Silber enthält, ſo enthält eine jede Mark der Miſchung 9 Loth feines Silber, und alſo iſt die Miſchung neunlöthig.

Eine andere Frage, die hier entſteht, iſt folgende. Man hat zwei Sorten legirter Metalle, z. B. 23karätiges und 15karätiges Gold; nach welchem Verhältniſſe müſſen beide Sorten zuſammengeſchmolzen werden, damit die Miſchung einen gegebenen mittlern Gehalt, z. B. von 20 Karat, habe?

menden, Resultaten zu finden. Wenn es z. B. darauf ankommt, den Abstand zweier ziemlich entfernten Punkte genau zu bestimmen, so findet immer, wie sorgfältig man auch

---

Diese Aufgabe kann nach der obigen Regel nicht gelöst werden, sie gehört vielmehr zu der sogenannten umgekehrten Alligations-Rechnung, welche mit Hülfe der Algebra sehr leicht behandelt werden kann, und ohne Zweifel deshalb von dem Verfasser übergangen worden ist. Da indessen dergleichen Aufgaben bei den Gold- und Silber-Rechnungen häufig vorkommen, so dürfte es nicht überflüssig seyn die Regel zur Auflösung hier beizubringen.

Gesetzt also man habe irgend eine Menge 23karätigen Goldes z. B. 4 Mrk. und irgend eine Menge 15karätigen Goldes, z. B. 2 Mrk., zusammen geschmolzen, so wird die Mischung an feinem Golde enthalten:

1stens 4 mal 23 Karat, oder 4 mal 20 Karat und 4 mal 3 Karat,

2tens 2 mal 15 Karat, oder 2 mal 20 Karat weniger 2 mal 5 Karat,

also zusammen 6 mal 20 Karat und 4 mal 3 Karat weniger 2 mal 5 Karat. Wären nun die angenommenen Mengen, 4 Mrk. und 2 Mrk., in dem richtigen Verhältnisse, so müßte die Mischung grade 4 mal und 2 mal d. i. 6 mal 20 Karat feines Gold enthalten, und das, was die Mischung wegen der 4 Mrk. 23karätigen Goldes an feinem Golde mehr enthält, nämlich 4 mal 3 Karat, müßte sich also aufheben mit dem, was die Mischung wegen der 2 Mrk. 15karätigen Goldes weniger enthält, nämlich mit 2 mal 5 Karat; es müßte folglich 4 mal 3, d. i. die Anzahl der Mark von dem höchsten Gehalt multiplicirt mit der Differenz dieses Gehaltes und des mittlern, gleich seyn 2 mal 5, d. i. der Anzahl Mark von dem niedrigsten Gehalt multiplicirt mit der Differenz dieses Gehaltes und des mittlern, welches bei den beispielsweise angenommenen Mengen nicht der Fall ist, und woraus man sieht, daß die Zahlen 4 und 2 nicht in dem gesuchten Verhältnisse stehen. Aber es ist jetzt leicht das richtige Verhältniß zu finden, denn die Glieder oder Zahlen, aus welchen es besteht, brauchen bloß so beschaffen zu seyn, daß die erste Zahl mit der ersten Differenz und die zweite Zahl mit der zweiten Differenz multiplicirt gleiche Producte geben, woraus sich ergiebt, daß sich verhalten muß

Die erste Differenz : der zweiten Differenz = die zweite Zahl : der ersten Zahl,

weil bei jedem andern Verhältnisse der beiden Zahlen die eben genannten Producte nicht einander gleich seyn würden. Das gesuchte Verhältniß ist also das umgekehrte der beiden Differenzen, und in unserm Beispiele muß sich die Menge des 23karätigen Goldes zu der des 15karätigen wie 5 : 3 verhalten.

Nunmehr wird es keine Schwierigkeit haben auch die folgende Aufgabe zu lösen: Ein Goldarbeiter hat $3\frac{1}{2}$ Mrk. 22karätiges Gold;

bei der Messung verfahren mag, eine kleine Unsicherheit im Resultate Statt, wegen der Fehler, die man beim Anlegen des Maaßes nothwendig begehen muß.

Wir wollen annehmen, man habe, um sich von der Richtigkeit der Messung zu überzeugen, mehrere Male hinter einander gemessen, zwei Mal habe man 3794,48 Fuß, drei Mal habe man 3795,27 Fuß gefunden und eine Messung habe 3793,115 Fuß gegeben. Da nun diese Zahlen nicht dieselben sind, so sind offenbar einige und wahrscheinlich alle fehlerhaft. Um diese Fehler zu verringern, stellt man folgende Ueberlegung an. Wenn man bei den sechs Messungen jedes Mal die richtige Entfernung erhalten hätte, so wäre die Summe der erhaltenen Resultate der sechsfachen Entfernung gleich, und es ist klar, daß noch eben dasselbe Statt finden würde, wenn von den erhaltenen Resultaten einige zu groß, andere zu klein wären, so aber, daß die Summe der Ueberschüsse der zu großen Resultate mit demjenigen, um welches die andern zu klein sind, sich aufhöbe. Man würde also in diesem letztern Falle zu der richtigen Entfernung gelangen, wenn man die Summe der Resultate durch ihre Anzahl dividirt.

---

wie viel 12karätiges muß er dazu schmelzen, damit er 19karätiges habe?

In der vorigen Aufgabe hat sich ergeben, daß sich die Differenzen, welche hier 3 und 7 sind, umgekehrt wie die Mengen der zusammen zu schmelzenden Sorten verhalten. Man hat daher

$$3 : 7 = x : 3\tfrac{1}{2}$$

woraus man für die gesuchte Menge $\frac{3 \text{ mal } 3\frac{1}{2}}{7}$ oder $1\frac{1}{2}$ Mrk. findet.

Auch die nachstehende Aufgabe läßt sich jetzt leicht auflösen: Ein Münzmeister hat 14löthiges und $8\frac{1}{2}$löthiges Silber; wie viel muß er von diesen Sorten zusammenschmelzen um 550 Mrk. 12löthiges Silber zu erhalten?

Die beiden Mengen, welche zusammen 550 Mrk. wiegen sollen, müssen nach dem Vorhergehenden, wie $3\frac{1}{2} : 2$ sich verhalten. Man findet also durch die Gesellschafts-Rechnung, daß von dem 14löthigen Silber 350 Mrk. und von dem $8\frac{1}{2}$löthigen 200 Mrk. genommen werden müssen. Uebers.

Nun ist zwar dieser Fall ein viel zu besonderer, als, daß man annehmen könnte, er werde häufig eintreten; indessen ereignet es sich fast immer, daß die Fehler auf beiden Seiten liegen, wo denn die einen einen Theil der andern aufheben, und das, was übrig bleibt nach dem angegebenen Verfahren auf alle Resultate in gleichem Maaße vertheilt und also um desto mehr verringert wird, je größer die Anzahl der Resultate ist.

In Folge dieser Betrachtungen nimmt man

2	mal	3794,48	oder	7588,96
3	mal	3795,27	oder	11385,81
1	mal	3793,115	oder	3793,115
6 Result., welche in allem				22767,885 geben.

Dividirt man nun 22767,885 durch 6, so findet man, daß die gesuchte mittlere Entfernung 3794,6475 Fuß ist.

Uebrigens gehören die Untersuchung und Schätzung der Vorzüge und Nachtheile dieser Methode zum Gebiete der Wahrscheinlichkeits-Rechnung, in welcher Beziehung dieser Gegenstand die größten Mathematiker unseres Jahrhunderts beschäftigt hat.

Von der Vergleichung der verschiedenen Maaße.

§ 147.

Da in verschiedenen Ländern verschiedene Maaße Statt zu finden pflegen, und viele Resultate in dem einen Maaße angegeben sind, die man öfters in einem andern Maaße ausgedrückt zu haben wünscht, so ist es häufig erforderlich das Maaß des einen Landes mit dem eines andern zu vergleichen. Die folgenden Beispiele werden hinreichen, den Leser mit den hierbei vorkommenden Rechnungen bekannt zu machen.

Soll der preußische Fuß mit dem alt-französischen oder pariser Fuße verglichen werden, so bemerke man, daß ein preußischer Fuß 139,13 pariser Linien enthält (§ 101 Anm.) während 1 pariser Fuß 12 pariser Zoll zu 12 pariser Linien, also

144 pariſer Linien enthält. Das Verhältniß des pariſer Fußes zum preußiſchen Fuße iſt demnach 144 : 139,13 oder 14400 : 13913, und der preußiſche Fuß iſt alſo $\frac{13913}{14400}$ pariſer Fußen gleich. Um daher eine gegebene Anzahl preußiſcher Fuße in alt-franzöſiſche oder pariſer Fuße zu verwandeln, braucht man nur dieſe Anzahl mit dem Bruche $\frac{13913}{14400}$ zu multipliciren. Da aber für den gewöhnlichen Gebrauch eine Annäherung hinreicht, ſo iſt es bequem, den eben gefundenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, wodurch man für den Werth eines preußiſchen Fußes 0,9661806 pariſer Fuß erhält. Man wird alſo nur nöthig haben dieſe Zahl mit der gegebenen Anzahl der preußiſchen Fuße zu multipliciren, um dieſe letztern in pariſer Fuße zu verwandeln.

Wenn nicht preußiſche Fuße ſondern preußiſche Zolle in pariſer Maaß zu verwandeln ſind, ſo erwäge man, daß 1 preußiſcher Zoll der zwölfte Theil eines preußiſchen Fußes, und 1 pariſer Zoll der zwölfte Theil eines pariſer Fußes iſt, und daß alſo, weil 1 preußiſcher Fuß gleich $\frac{13913}{14400}$ pariſer Fuß iſt, 1 preußiſcher Zoll gleich $\frac{13913}{14400}$ oder 0,9661806 pariſer Zoll ſeyn muß.

Aus ähnlichen Gründen folgt, daß 1 preußiſche Linie gleich 0,9661806 pariſer Linien iſt.

§ 148

Um den preußiſchen Fuß mit dem franzöſiſchen Meter zu vergleichen bemerke man, daß 1 Meter 3 Fuß 0 Zoll 11,296 Linien pariſer Maaßes oder 443,296 pariſer Linien gleich iſt, während 1 preußiſcher Fuß 139,13 pariſer Linien hat. Das Verhältniß des Meters zum preußiſchen Fuße iſt daher 443,296 : 139,13 oder 443296 : 139130, und der preußiſche Fuß iſt demnach $\frac{139130}{443296}$ Meter gleich. Um alſo irgend eine Anzahl preußiſcher Fuße in Meter zu verwandeln, braucht man bloß dieſe Anzahl mit dem Bruche $\frac{139130}{443296}$ zu multipliciren, oder, wenn nur eine Annäherung nöthig iſt, mit dem Decimalbruche 0,3138535.

§ 149.

Um die Verwandlung des preußischen, alt-französischen und neu-französischen Maaßes in einander zu erleichtern, haben wir am Ende dieses Buches Tafeln angehängt, welche die Resultate der vorigen §§ und diejenigen enthalten, welche man findet, wenn man mit den Flächen- und Körper-Maaßen und Gewichten auf dieselbe Weise verfährt. Außerdem haben wir einige Tafeln zur Vergleichung verschiedener fremder Münzen beigefügt. Um den Gebrauch jener Tafeln zu zeigen, wird es hinreichen ein Beispiel einer solchen Verwandlung zu geben. Wir wollen also annehmen, daß 47,903 Meter in preußische Fuß verwandelt werden sollen.

In der ersten Tafel findet man, daß

Meter		preuß. Fuß		Meter		pr. Fuß
4	=	12,7447998	woraus folgt, daß	40	=	127,447998
7	=	22,3033997	= = =	7	=	22,3033997
9	=	28,6757996	= = =	0,9	=	2,86757996
3	=	9,5585999	= = =	0,003	=	0,0095585999
			folglich	47,903	=	152,62853[illegible]99

in welchem Resultate die fünf ersten Decimalziffern gewiß richtig sind, die folgenden aber falsch seyn können und deshalb ausgestrichen sind.

§ 150.

So wie wir in den §§ 147 und 148 bei der Verwandlung des preußischen Fußes in pariser Fuße und Meter verfuhren, eben so kann man zu Werke gehen, wenn es darauf ankommt eine Größe, die in irgend einem Maaße angegeben ist, durch ein anderes Maaß auszudrücken, vorausgesetzt, daß das Verhältniß dieser beiden Maaße unmittelbar oder mittelbar gegeben ist. Das folgende Beispiel wird den aufmerksamen Leser in den Stand setzen das in Rede stehende Verfahren auf alle vorkommende Fälle dieser Art anzuwenden, und ihm zugleich den Gebrauch der Kettenregel (§ 140 Anm.)

zeigen, welche besonders bei Vergleichung der Münzen und anderen Maaße ihre Anwendung findet *).

Wir wollen annehmen, man wüßte, daß 1 englisches Livre oder Pfund Sterling $24\frac{1}{3}$ Franken gilt, daß 3 Franken mit 26 Schillingen, von welchen 16 eine Mark hamburger Banco ausmachen, bezahlt werden, und daß 300 Mrk. Banco zu 152 Thlr. preuß. Courant berechnet werden. Es wird gefragt, wie viel 400 Pfund Sterling in preußischem Courant betragen.

1stens. Da 1 Pfund Sterling $24\frac{1}{3}$ Franken ausmachen, so ist 1 Pfund Sterling $\frac{73}{3}$ Franken.

2tens. Da 3 Franken 26 Schilling gelten, so ist 1 Frank $\frac{26}{3}$ Schillinge.

3tens. Da 16 Schillinge zu einer Mark Banco gehören, so ist 1 Schilling $\frac{1}{16}$ Mark Banco.

4tens. Da 300 Mark Banco 152 Thlr. preuß. Cour. werth sind, so ist 1 Mark Banco $\frac{152}{300}$ Thlr. preuß. Cour.

Man verwandelt daher das Pfund Sterling in preußische Thaler, wenn man $\frac{73}{3}$ von $\frac{26}{3}$ von $\frac{1}{16}$ von $\frac{152}{300}$ nimmt. Dies giebt für das Verhältniß des Pfundes zum Thaler

$$\frac{73 \text{ mit } 26 \text{ mit } 1 \text{ mit } 152}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 16 \text{ mit } 300}$$

und multiplicirt man dieses Verhältniß mit 400, so hat man den Werth von 400 Pfund Sterling in preußischen Thalern ausgedrückt, nemlich

$$\frac{400 \text{ mit } 73 \text{ mit } 26 \text{ mit } 1 \text{ mit } 152}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 16 \text{ mit } 300}.$$

Diese gebrochene Zahl kann auf einen einfachern Ausdruck gebracht werden, weil Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren haben. In jenem ist der Factor 400 und in diesem der Factor 300 durch 100 theilbar, und wenn man die Division verrichtet, so ergiebt sich

*) Weshalb sie auch Reductions-Rechnung genannt wird. Ueberf.

$$\frac{4 \text{ mit } 73 \text{ mit } 26 \text{ mit } 1 \text{ mit } 152}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 16 \text{ mit } 3}.$$

Da ferner in dem Zähler die Zahl 26 und in dem Nenner die Zahl 16 durch 2 theilbar iſt, ſo hat man

$$\frac{4 \text{ mit } 73 \text{ mit } 13 \text{ mit } 1 \text{ mit } 152}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 8 \text{ mit } 3},$$

und da die 8 des Nenners durch die 4 des Zählers theilbar iſt, ſo kann man dieſe 4 eben ſo wie die 1 im Zähler weglaſſen, und man erhält dadurch

$$\frac{73 \text{ mit } 13 \text{ mit } 152}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 2 \text{ mit } 3}.$$

Da endlich die 152 des Zählers durch die 2 des Nenners theilbar iſt, ſo ergiebt ſich

$$\frac{73 \text{ mit } 13 \text{ mit } 76}{3 \text{ mit } 3 \text{ mit } 3}$$ oder $2671\frac{7}{27}$ Thlr. preuß. Cour.

als der Werth von 400 Pfund Sterling *).

Von einigen Erleichterungs- und Abkürzungs-Mitteln bei arithmetiſchen Rechnungen.

§ 151.

Wenn man zwei Zahlen mit einander zu multipliciren hat, die mit einer beträchtlichen Anzahl Ziffern geſchrieben ſind, ſo iſt es vortheilhaft vorher die einzelnen Producte des Multiplicandus mit jeder der verſchiedenen Ziffern des Multiplica-

*) Nach der in der Anmerkung zum § 140 angegebenen Art den Kettenaufſatz zu formiren, würde die obige Rechnung folgende Geſtalt bekommen:

			400	Pf. St.	4
3	1	Pf. St.	218	Fr.	73
	3	Fr.	26	Schill.	13
28	16	Schill.	1	Mark Bco.	
3	300	Mark Bco.	128	Ruſſ. vr. C.	76
27			72124	|	$2671\frac{7}{27}$ Ruſſ.

Ueberſ.

tors zu bilden. Es seyen z. B. die beiden Zahlen 2937487541 und 67431456 mit einander zu multipliciren. Wir bemerken hier zuförderst, daß der Multiplicator 67431456 nur folgende verschiedene Ziffern 1, 3, 4, 5, 6 und 7 enthält. Multiplicirt man den Multiplicandus nach einander mit einer jeden dieser Ziffern, so ergiebt sich folgende Tabelle

1	2937487541
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

aus welcher wir die Producte des Multiplicandus mit den Ziffern 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7 und 6 nehmen, sie wie folgt in die ihnen zukommenden Stellen setzen, und alsdann nur eine Addition zu verrichten haben.

17624925246
14687437705.
11749950164..
2937487541...
8812462623....
11749950164.....
20562412787 .....
17624925246 .....

198079061871489696

Befolgt man dieses Verfahren, so kann man höchstens 9 verschiedene Producte zu bilden haben, und alles Uebrige ist eine bloße Addition *).

§ 152.

Die Division läßt sich auf bloße Subtractionen zurückführen, wenn man sich vorher eine Tabelle der Producte des

*) Dieses Verfahren ist besonders dann zu empfehlen, wenn man mehrere Multiplicationen zu machen hat, in welchen der Multiplicandus derselbe und nur die Multiplicatoren verschieden sind. Die ersten der am Ende befindlichen Tafeln sind im Grunde nichts anders als solche Multiplications-Tabellen. Ueberf.

456259573
9453682

91251914
36500760
.2737554
..136875
...22810
....1824
.....405

130652142

Auf diese Weise steht eine jede Ziffer des Multiplicators unter derjenigen des Multiplicandus, bei welcher die Multiplication mit jener anfangen soll, so daß man alle ihr zur rechten stehenden Ziffern bei dieser Multiplication außer Acht zu lassen, und alle einzelnen Producte so unter einander zu setzen hat, daß die Ziffern, mit welchen sie anfangen, in einer und derselben Columne zu stehen kommen, weil diese Ziffern Einheiten einer und derselben Ordnung bedeuten. Addirt man diese Partial-Producte und sondert sodann, weil die letzte Ziffer Hunderttausendtel bedeutet, fünf Decimalziffern ab, so hat man 1306,52142 und wenn man die beiden letzten Decimalziffern wegläßt, 1306,521, ein Resultat, welches mit demjenigen, das die gewöhnliche Multiplication gegeben haben würde, und das 1306,521644004577 ist, bis auf die Tausendtel übereinstimmt *).

*) Hier war es hinreichend zwei Decimalstellen mehr zu berechnen als verlangt wurden, und in den meisten Fällen wird nicht mehr nöthig seyn. Um ein Beispiel zu haben, in welchem es nicht hinreichend ist zwei Decimalstellen mehr zu berechnen als verlangt werden, nehme man an, es wären die beiden gleichen Zahlen 9999,99999999 und 9999,99999999 mit einander zu multipliciren, und das Product würde auf 3 Decimalstellen genau verlangt. Berechnet man das Product nach der angegebenen Abkürzungs-Methode auf 5 Decimalstellen, so ergiebt sich 99999999,99882, während das genaue Product 99999999,999800000000001 ist, so daß die dritte Decimalstelle nach jenem Verfahren unrichtig wird.

Man wird aber mit einiger Aufmerksamkeit in allen Fällen leicht entscheiden können, wie viel Decimalstellen man zu berechnen habe, um wegen der Richtigkeit der geforderten außer Zweifel zu seyn. Uebers.

§ 153.

Wenn man mit Decimalbrüchen rechnet und nur einen gewiſſen Grad von Genauigkeit verlangt, ſo kann man die Multiplication durch folgendes Verfahren merklich abkürzen.

Geſetzt es werde das Product der beiden Zahlen 45,6259573 und 28,63549 bis auf ein Tauſendtel genau verlangt, ſo ſieht man ein, daß es unnöthig iſt, in den Partial-Producten die Decimalziffern hinzuſchreiben, welche Einheiten von einer niedrigern Ordnung als 100000tel bedeuten, weil die Summen der Columnen, welche Einheiten niedrigerer Ordnungen enthalten eben ſo wenig als dasjenige, was bei ihrer Addition zurückgehalten und zu den folgenden Columnen hinzugezählt wird, auf die Tauſendtel Einfluß haben kann. Es iſt alſo nur nöthig das Product bis auf Hunderttauſendtel zu bilden, und wenn man demnach mit der auf der linken Seite des Multiplicators ſtehenden Ziffer 2, welche hier Zehner bedeutet, zu multipliciren anfängt, ſo iſt es hinreichend die Multiplication bei der Ziffer 7, welche die Milliontel des Multiplicandus angiebt, zu beginnen. Da die Ziffern, welche nach der Ziffer der Zehner folgen, zehn und zehn mal kleinere Einheiten bedeuten, ſo braucht man nur, wenn man mit ihnen multiplicirt, bei den Ziffern 5, 9, 5 u. ſ. w., welche auf der linken Seite nach der Ziffer 7 folgen, anzufangen, weil die Hunderttauſendtel, 5, des Multiplicandus mit den Einern, 8, des Multiplicators multiplicirt, Hunderttauſendtel geben; eben ſo wie die Zehntauſendtel, 9, des Multiplicandus mit den Zehnteln, 6, des Multiplicators; die Tauſendtel, 5, des Multiplicandus mit den Hunderteln, 3, des Multiplicators u. ſ. f.

Damit man ſich in den Anfang der Partial-Multiplicationen nicht irre, kann man die Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Ordnung unter dem Multiplicandus ſchreiben, und zwar ſo, daß die Zehner des erſtern unter den Millionteln des letztern zu ſtehen kommen, wie folgt:

vereinfachen, und es ist daher sehr nützlich diese Zerlegung bewerkstelligen zu können. Das folgende Beispiel wird zeigen wie man hierzu gelangt.

Es sey 360 die Zahl, welche in ihre Factoren zerlegt werden soll. Wir dividiren diese Zahl durch 2, wodurch wir 180 zum Quotienten erhalten; diesen Quotienten dividiren wir wieder durch 2, was 90 zum Quotienten giebt, den wir wiederum durch 2 dividiren, und dadurch 45 erhalten. Daraus sehen wir, daß 360 gleich 2 mit 2 mit 2 mit 45 ist. Da nun die Zahl 45 nicht durch 2 theilbar ist, so dividiren wir sie durch 3, wodurch 15 herauskommt, welche Zahl wir wieder durch 3 dividiren, wodurch wir 5 erhalten, eine Primzahl, die nur durch sich selbst oder durch die Einheit theilbar ist. 45 ist also gleich 3 mit 3 mit 5, und folglich ist 360 gleich

2 mit 2 mit 2 mit 3 mit 3 mit 5.

Diese sechs Factoren, welche Primzahlen sind, sind die einfachen Factoren der Zahl 360. Es ist hieraus ersichtlich, daß jede Zahl, die keine Primzahl ist, auf diese Weise immer in eine gewisse Anzahl einfacher oder Primfactoren zerlegt werden kann.

Um nun alle Zahlen zu bilden, durch welche die vorgelegte theilbar ist, schreibt man die Quotienten, die zu den Primfactoren gehören, und diese Factoren in zwei Columnen neben einander, wie es die folgende Tafel zeigt:

360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	2	8
15	3	3 6 12 24
5	3	9 18 36 72
1	5	5 10 15 20 30 40 45 60 90 120 180 360

Aus der dritten Zeile ist dann zu ersehen, daß die vorgelegte Zahl zwei mal nach einander durch 2, und daß sie folglich durch das Product von 2 mit 2 oder durch 4 theilbar ist, welche letztere Zahl man in die dritte Zeile neben die 2 setzt.

Da der Quotient 90 von neuem durch 2 dividirt worden ist, so folgt, daß die vorgelegte Zahl durch 2 mal 4 oder durch 8 theilbar seyn muß, und man schreibt diese 8 in die vierte Zeile neben die 2. Da ferner der zu Anfang dieser Zeile befindliche Quotient 45 durch 3 theilbar ist, so muß die vorgelegte Zahl durch die Producte von 3 mit jedem der vorhergehenden Divisoren theilbar seyn; man bildet daher in der fünften Zeile die neuen zusammengesetzten Theiler 6, 12, 24. Und wenn man so fortfährt, den einfachen Factor einer jeden Zeile mit allen vorhergehenden Divisoren zu multipliciren, nur aber nicht zwei mal dasselbe Product hinschreibt, so hat man alle Theiler der vorgelegten Zahl.

Grundbegriff von den zusammenhängenden oder Ketten-Brüchen.

§ 155.

Wenn eine Rechnung auf einen Bruch führt, dessen Zähler und Nenner große Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man, um zu einer Vorstellung von der Größe dieses Bruches zu gelangen, Näherungswerthe desselben suchen, welche durch kleinere Zahlen ausgedrückt sind.

Wenn wir z. B. die gebrochene Zahl $\frac{1103}{887}$ haben, ziehen wir zuförderst die Ganzen heraus und erhalten dadurch 1 und $\frac{216}{887}$. Um uns nun eine deutlichere Vorstellung von der Größe des Bruches $\frac{216}{887}$ zu verschaffen, suchen wir ihn mit einem Theile der Einheit zu vergleichen, damit wir nur ein Glied des Bruches ins Auge zu fassen brauchen. Wir dividiren zu dem Ende seine beiden Glieder durch 216, und finden dann 1 für den Quotienten des Zählers und $4\frac{23}{216}$ für den des Nenners. Der letztere Quotient, welcher zwischen 4 und 5 liegt, lehrt uns, daß der Bruch $\frac{216}{887}$ zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ liegt, und wenn wir hier inne halten, sehen wir, daß der zweite Näherungswerth

des Ausdrucks $\frac{1103}{887}$, $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist, daß aber dieser Werth zu groß ist, weil der wahre Werth gleich 1 und 1 dividirt durch $4\frac{23}{216}$ seyn würde, welches $1\frac{1}{4\frac{23}{216}}$ geschrieben wird.

Um uns eine genaue Vorstellung von dem Ausdruck $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$ zu bilden, müssen wir ihn als den Quotienten von 1 dividirt durch 4 und $\frac{23}{216}$ betrachten.

Dividiren wir nun die beiden Glieder des Bruches $\frac{231}{216}$ durch 23, so erhalten wir $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; und, wenn wir die $\frac{9}{23}$, welche den 9 Ganzen hier angehängt sind, außer Acht lassen, bloß $\frac{1}{9}$. Folglich ist $1\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ ein dritter Näherungswerth von $\frac{1103}{887}$, welcher aber zu klein, weil 9 kleiner ist als der richtige Quotient von 216 durch 23, daher auch $\frac{1}{9}$ größer als derjenige Bruch ist, welcher der 4 angehängt werden sollte; folglich ist der Divisor $4\frac{1}{9}$ größer als der richtige Divisor $4\frac{23}{216}$ und also $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ kleiner als der eigentliche Quotient $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$.

Bringen wir die 4 Ganzen und den angehängten Bruch $\frac{1}{9}$ auf einerlei Benennung und verrichten die Division nach § 80, so kommt $\frac{9}{37}$ und wir haben $1\frac{9}{37}$ oder $\frac{46}{37}$ für den dritten Näherungswerth von $\frac{1103}{887}$.

Da der genaue Ausdruck für den Werth dieses Bruches

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}}$$

ist, so bekommen wir, wenn wir beide Glieder des Bruches $\frac{9}{23}$ durch 9 dividiren

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}}$$

und wenn wir den Bruch $\frac{5}{9}$ außer Acht lassen

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{5}{2}}}$$

ein Werth, der zu groß ist. Denn der Bruch $\frac{5}{2}$ ist größer als $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$ und bildet also mit 9 zusammen genommen einen Nenner,

der zu groß ist; der zu 4 hinzuzufügende Bruch ist also zu klein, und da nun der letzte Nenner zu klein ist, so ist der Ausdruck zu groß.

Verwandeln wir zunächst $9\frac{1}{2}$ in einen Bruch, so kommt $\frac{19}{2}$; $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ ist also $\frac{2}{19}$, und unser Näherungswerth wird dadurch $1\frac{1}{4\frac{2}{19}}$. Nun ist $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ gleich $\frac{19}{78}$, und wenn wir 1 hinzuzählen, so haben wir $1\frac{19}{78}$ oder $\frac{97}{78}$ für den vierten Näherungswerth von $\frac{1103}{887}$.

Nehmen wir den Ausdruck

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}}$$

wieder vor, und dividiren beide Glieder des letzten Bruches $\frac{5}{9}$ durch 5, so erhalten wir $\frac{1}{1\frac{4}{5}}$ und $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{4}{5}}}}}$

also, wenn wir den Bruch $\frac{4}{5}$ außer Acht lassen,

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1}}}}$$

ein Ausdruck, von dem sich wie oben zeigen läßt, daß er zu klein ist.

Der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ reducirt sich auf $\frac{1}{3}$; und da alsdann der folgende Bruch, nämlich $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$, $\frac{3}{28}$ giebt, so verwandelt sich der nachher folgende, nämlich $4\frac{1}{9\frac{1}{3}}$ in $4\frac{3}{28}$, welches gleich $\frac{115}{28}$ ist, so daß der 5te Näherungswerth $1\frac{287}{115}$ oder $\frac{143}{115}$ ist.

Dividiren wir endlich die beiden Glieder des eben weggelassenen Bruches $\frac{4}{5}$ durch 4, so erhalten wir $\frac{1}{1\frac{1}{4}}$, und wenn wir nun den Bruch $\frac{1}{4}$ außer Acht lassen, so ergiebt sich

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{1}{4}}}}}$$

ein Ausdruck, der zu groß ist.

Wenn wir nach einander alle Nenner in unächte Brüche verwandeln (einrichten), so finden wir $1\frac{47}{193}$ oder $\frac{245}{193}$ als 6ten Näherungswerth.

Setzen wir den zuletzt außer Acht gelassenen Bruch $\frac{1}{4}$ wieder an seine Stelle, so wird dadurch der Ausdruck

$$1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$$

gebildet, welcher die gegebene Zahl $\frac{1103}{887}$ wieder giebt, wenn man ihn wie die vorigen Ausdrücke reducirt.

Auf dieselbe Weise kann man jeden andern gegebenen Bruch behandeln, und dadurch eine Reihe von Näherungswerthen erhalten, die, wenn der gegebene Bruch ein ächter ist, wechselsweise größer und kleiner, und wenn er, wie im obigen Beispiele, ein unächter ist, wechselsweise kleiner und größer als der eigentliche Werth desselben seyn werden.

Die eben gefundenen Entwickelungen des Ausdrucks $\frac{1103}{887}$ heißen Ketten-Brüche oder zusammenhängende Brüche, von welchen man folgende allgemeine Erklärung geben kann: Ketten-Brüche sind Brüche, deren Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, welcher letztere Bruch einen Nenner hat, der wieder aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, u. s. f. Diese Art Brüche hat viele sehr merkwürdige Eigenschaften, wegen welcher wir auf die Algebra verweisen.

Ueber die Anwendung der Arithmetik auf kaufmännische und Banquier-Geschäfte.

§ 156.

Nach der großen Anzahl von Regeln und Vorschriften zu urtheilen, welche die, für den Kaufmann und Banquier bestimmten, Rechenbücher enthalten, könnte man glauben, daß

es für dieſe Gewerbe eine ganz beſondere Arithmetik gäbe, während doch die ganze Schwierigkeit bei der Anwendung der allgemeinen Regeln nur in dem Verſtändniſſe der durch den Gebrauch eingeführten Kunſtausdrücke liegt. Wenn dieſe Ausdrücke vollſtändig erklärt ſind, ſo wird jeder fertige Rechner die ihm gegebenen Aufgaben richtig beantworten.

Disconto- und Wechſel-Geſchäfte ſind die am häufigſten vorkommenden Operationen des Banquiers. Man hat in § 137 geſehen, wie das Disconto der Natur der Sache gemäß zu berechnen wäre; es iſt aber bei den Banquiers herkömmlicher Gebrauch, die Zinſen von der ganzen Summe vor weg zu nehmen, als ob es dieſe Summe ſelbſt wäre, die ſie vorſchießen. (M. ſ. die Anmerk. Seite 122).

Im Allgemeinen hat jede Summe, über welche man erſt nach Verlauf einer gewiſſen Zeit verfügen kann, einen baaren Werth, der geringer als ihr Nenn-Werth (Nominal-Werth) iſt; weil der baare Werth von dem Augenblicke an, wo man ihn beſitzt, Zinſen tragen kann. Daher kommt es, daß man, um Summen mit einander zu vergleichen, die in verſchiedenen Terminen zahlbar ſind, die Zinſen in Rechnung bringen muß, welche ihre baaren Werthe demjenigen bringen können, der über ſie zu verfügen hat. Die Regeln des § 137 ſind für dieſen Gegenſtand hinreichend, wenn der Zeitraum kleiner als ein Jahr iſt, oder wenn die Zinſen am Ende des Jahres nicht zum Kapital geſchlagen werden; in dem entgegengeſetzten Falle muß man die Regeln für die zuſammengeſetzte Zinsrechnung anwenden, welche in der Algebra gegeben werden.

Die kaufmänniſchen Wechſel oder Wechſelbriefe, welche dazu dienen, das Hin- und Herſenden des baaren Geldes zu vermeiden, indem ſie die, von Kaufleuten verſchiedener Oerter gegenſeitig eingegangenen, Schulden durch einander ausgleichen, führen zu einer Rechnung, deren Zweck es iſt, diejenige Summe zu finden, welche die in einem Orte zahlbare Summe in einem andern werth iſt, es ſey nun unmittelbar

durch das Verhältniß der Münzen beider Oerter (des Wechſelcourſes), oder vermittelſt einer Reihe von Verhältniſſen der Münzen verſchiedener mit einander in kaufmänniſcher Verbindung ſtehenden Oerter. Der § 150 enthält ein allgemeines Beiſpiel dieſer Rechnung, und alle beſonderen Fälle weichen davon nur in der zu reducirenden Summe und in den gegebenen Verhältniſſen (Courſen) der verſchiedenen Münzen ab, welche täglich in den öffentlichen Courszetteln verzeichnet werden, weil ſie von den Umſtänden abhängen und daher veränderlich ſind.

Aber dieſe Veränderungen haben auf das Weſen des, mit dem Namen der Kettenrechnung (§ 140 Anm.) bezeichneten, Verfahrens keinen Einfluß.

Was die bei andern kaufmänniſchen Geſchäften vorkommenden Rechnungen betrifft, ſo findet man in dem § 141 alles, was nöthig iſt, um den Gewinn und Verluſt einer Handlungsgeſellſchaft zu vertheilen. Die Proviſion des Commiſſionairs, der Rabatt, das Gutgewicht u. ſ. w. werden nach Procenten, wie Zinſen, angegeben, und auf ähnliche Weiſe berechnet. Zoll und Acciſe haben entweder ein beſtimmtes Verhältniß zum Werthe der Waaren, oder ſie ſind für die Einheit des Gewichts oder des Inhalts derſelben feſtgeſetzt, und laſſen ſich alſo für jede Quantität vermittelſt der Proportionen oder der Brüche berechnen.

Endlich iſt die Buchführung nichts als eine Art, die von dem Kaufmanne gelieferten und empfangenen Werthe (Valuten) in einer ſolchen Ordnung aufzuſchreiben, daß er in jedem Augenblicke beides mit einander zu vergleichen im Stande iſt, um die Differenz zu finden, und ſo die Bilanz ziehen zu können zwiſchen dem, was er zu fordern hat und dem, was er ſchuldig iſt.

Tafel I.

zur gegenseitigen Verwandlung des preußischen, alt-französischen und neu-französischen Längen-Maaßes.

Preuß. Fuß	Pariſ. Fuß	Meter	Pariſ. Fuß	Preuß. Fuß	Meter	Meter	Preuß. Fuß	Pariſ. Fuß
1	0,9661806	0,3138535	1	1,0350032	0,3248394	1	3,1862000	3,0784444
2	1,9323611	0,6277070	2	2,0700064	0,6496788	2	6,3723999	6,1568889
3	2,8985417	0,9415605	3	3,1050097	0,9745182	3	9,5585999	9,2353333
4	3,8647222	1,2554140	4	4,1400129	1,2993575	4	12,7447998	12,3137777
5	4,8309028	1,5692675	5	5,1750162	1,6241969	5	15,9309998	15,3922222
6	5,7970833	1,8831210	6	6,2100194	1,9490363	6	19,1171997	18,4706667
7	6,7632639	2,1969745	7	7,2450226	2,2738757	7	22,3033997	21,5491111
8	7,7294444	2,5108280	8	8,2800259	2,5987151	8	25,4895997	24,6275556
9	8,6956250	2,8246815	9	9,3150291	2,9235545	9	28,6757996	27,7060000

Tafel II.

zur gegenseitigen Verwandlung des preußischen, alt-französischen und neu-französischen Flächen-Maaßes.

Preuß. Quad. Fuß	Pariser Quadr. Fuß	Quadrat-Meter	Pariser Quadr. Fuß	Preußischer Quadr. Fuß	Quadrat-Met.	Quadrat-Meter	Preußische Quadrat-Fuß	Pariser Quadr. Fuß
1	0,9335049	0,0985040	1	1,0712317	0,1055206	1	10,1518702	9,4768202
2	1,8670097	0,1970080	2	2,1424634	0,2110413	2	20,3037403	18,9536404
3	2,8005146	0,2955121	3	3,2136951	0,3165619	3	30,4556105	28,4304606
4	3,7340194	0,3940161	4	4,2849268	0,4220825	4	40,6074807	37,9072808
5	4,6675243	0,4925201	5	5,3561585	0,5276031	5	50,7593508	47,3841010
6	5,6010292	0,5910241	6	6,4273902	0,6331238	6	60,9112210	56,8609212
7	6,5345340	0,6895281	7	7,4986219	0,7386444	7	71,0630912	66,3377414
8	7,4680389	0,7880322	8	8,5698536	0,8441650	8	81,2149613	75,8145616
9	8,4015437	0,8865362	9	9,6410852	0,9496859	9	91,3668315	85,2913818

Tafel III.

zur gegenseitigen Verwandlung des preußischen, alt-französischen und neu-französischen Körper-Maaßes.

Preuß. Cubik-Fuß	Pariser Cubik-Fuß	Cubik-Meter	Pariser Cubik-Fuß	Preußische Cubik-Fuß	Cubik-Meter	Cubik-Meter	Preußische Cubik-Fuß	Pariser Cubik-Fuß
1	0,9019342	0,0309158	1	1,1087283	0,0342773	1	32,3458883	29,17386449
2	1,8038685	0,0618317	2	2,2174565	0,0685545	2	64,6917766	58,34772898
3	2,7058027	0,0927475	3	3,3261848	0,1028318	3	97,0376648	87,52159346
4	3,6077370	0,1236633	4	4,4349130	0,1371090	4	129,3835531	116,69545795
5	4,5096712	0,1545791	5	5,5436413	0,1713863	5	161,7294414	145,86932244
6	5,4116055	0,1854950	6	6,6523696	0,2056635	6	194,0753297	175,04318693
7	6,3135397	0,2164108	7	7,7610978	0,2399408	7	226,4212180	204,21705142
8	7,2154739	0,2473266	8	8,8698261	0,2742180	8	258,7671063	233,39091590
9	8,1174082	0,2782425	9	9,9785543	0,3084953	9	291,1129945	262,56478039

Tafel IV.

zur gegenseitigen Verwandlung des preußischen und neu-französischen Gewichtes.

Preuß. Pfunde	Gramme	Preuß. Lothe	Gramme	Gramme	Preuß. Pfunde	Preuß. Loth
1	467,711078797	1	14,61597121	1	0,002138072082	0,068418306624
2	935,422157594	2	29,23194242	2	0,004276144164	0,136836613248
3	1403,133236391	3	43,84791363	3	0,006414216246	0,205254919872
4	1870,844315188	4	58,46388484	4	0,008552288328	0,273673226496
5	2338,555393985	5	73,07985605	5	0,010690360410	0,342091533120
6	2806,266472782	6	87,69582726	6	0,012828432492	0,410509839744
7	3273,977551579	7	102,31179847	7	0,014966504574	0,478928146368
8	3741,688630376	8	116,92776968	8	0,017104576656	0,547346452992
9	4209,399709173	9	131,54374089	9	0,019242648738	0,615764759616

V. Vergleichungs-Tafel mehrerer fremder Gold- und Silber-Münzen.

Diese Tafel enthält folgende Angaben: 1) Wie viel Stück der darin genannten Münzen zusammengenommen eine preuß. Mark wiegen; 2) den Gehalt, oder wie viel Grän feines Silber in jener (rauhen) Mark, welche 288 Gr. ausmacht, enthalten sind; und 3) den Werth eines jeden Stükkes, und zwar der Gold-Münzen in Passier-Pistolen zu 5 Thlrn., und der Silber-Münzen in preuß. Courant.

[Hierbei ist zu bemerken, daß 35,6 Passier-Pistolen eine pr. Mark wiegen und 260 Grän feines Gold enthalten. Daher ist 1 Friedrichsd'or gleich $1\frac{1}{75}$ Passier-Pistolen, und 100 Thlr. Friedrichsd'ors zu 5 Thlr. gleich $101\frac{1}{7}$ Thlr. Passier-Pistolen zu 5 Thlrn.].

Gold-Münzen.	Auf 1 rauhe preuß. Mrk. gehen Stück	Gehalt	Werth von 1 Stück in Pass. Pist. zu 5 Thlr.
Dänische			
Species-Ducaten	67	282	2,88151
Courant-Ducaten	75	252	2,30031
Christiansd'ors	35	260	5,08571
Deutsche			
Ducaten nach dem Reichsfuße . .	67	284	2,90195
" " " holländischen Fuße	67	283	2,89173
" " " Passier-Fuße .	67	282	2,88151
Pistolen, als sächsische Augustd'ors, braunschweigische Carld'ors, hannöverische Georgd'ors u. s. w. gesetzmäßig	35	261	5,10527
nach dem Passier-Fuße	35,6	260	5,00000
Englische			
Guineen, nach gewöhnlicher Annahme	28,5	264	6,34170
Neue $\frac{1}{3}$-Guineen zu 7 Schill. . .	$83\frac{5}{8}$	264	2,16130
Sovereign zu 20 Schill.	$29\frac{1}{4}$	264	6,17909
Französische			
20-Frankenstücke	36,52	259,2	4,85904
Genuesische			
Zechinen	67	286,5	2,92750

Gold-Münzen.	Auf 1 rauhe preuß. Mrk. gehen Stück	Gehalt	Werth von 1 Stück in Pass. Pist. zu 5 Thlrn.
Helvetische			
32-Frankenstücke	15⅓	260	11,60870
16-Frankenstücke	30⅔	260	5,80435
Holländische			
Ruyder zu 14 Gulden Courant .	23¼	264	7,69100
Ducaten	67	283	2,89173
Luccaische			
Alte Zechinen zu 15, mit Agio zu 16 Lire	68,55	286,5	2,86130
Doppien oder Pistolen zu 22 Lire	42⅓	264	4,26941
Nordamerikanische			
Adler (Eagle) zu 5 Dollars . . .	26,726	264	6,76264
Päbstliche			
Zechinen	68,225	284	2,84985
Doppien oder Pistolen	42,75	264	4,22780
Parmaische			
Zechinen	67$\frac{11}{30}$	282	2,86583
40-Liresstücke von Marie Louise .	18,123	259,2	9,79155
20-Liresstücke " " " . .	36,246	259,2	4,89578
Portugiesische			
Lisboninen zu 4800 Rees . . .	21,7284	264	8,31807
Johannes zu 16 Cruzaden oder 6400 Rees	16,296	264	11,09097
Preußische			
Friedrichsd'ors	35	260	5,08571
Russische			
Imperial zu 10 Rubel von 1789 .	18	264	10,04102
Alte Imperial zu 10 Rubel von 1755	14,118	264	12,80199
Sardinische			
Carlini	14,55	258	12,13957
Savoyische und Piemontesische			
Doppien zu 24 Lire	25⅝	261	6,97306
Sächsische			
Augustd'ors (nach französischer Probe)	35$\frac{1}{16}$	260	5,07665
Schwedische			
Ducaten	67⅛	281	2,86595
Schweizerische			
Ducaten von Basel, Bern, Genf, Luzern, Schweiz, Zürich . . .	67	282	2,88151

Gold-Münzen.	Auf 1 rauhe preuß. Mrk. gehen Stück	Gehalt	Werth von 1 Stück in Pass. Pist. zu 5 Thlrn.
Ducaten von Chur	67	281	2,87130
Neue Louisd'ors von Bern . . .	30⅔	260	5,80435
Sicilianische			
Oncie zu 3 Duc. Reg.	52,46	249	3,24951
Spanische			
Pistolen seit 1772 erste Annahme .	34,5	258	5,11973
zweite Annahme .	34,5	260	5,15942
vor 1772 erste Annahme .	34,5	261	5,17926
zweite Annahme .	34,5	264	5,23879
Toscanische			
Rusponi zu 3 Zechinen oder 40 Lire moneta buona	22,35	287,5	8,80657
Zecchini	67,05	287,5	2,93552
Rosinen (nach französischer Probe)	34,108	258	5,17857
Doppien von 1746 (nach französischer Probe)	34,92	264	5,17579
Venetianische			
Zechinen zu 22 Lire piccoli. . .	66,86	288	2,94899
Ducado d'oro zu 14 Lire piccoli .	107,48	288	1,83447
Doppien oder Pistolen zu 38 Lire piccoli	34,546	257	5,09310

Silber-Münzen.	Auf 1 rauhe preuß. Mrk. gehen Stück	Gehalt	Werth von 1 Stück in preuß. Courant
Dänische			
Species-Reichsthaler	$8\frac{3}{11}$	252	1,51351
Deutsche			
Species-Thaler nach dem Conventions-Fuß	$8\frac{1}{3}$	240	1,40000
Species-Thaler nach dem Leipziger Fuß	8	256	1,55555
Englische			
Kronen (Crown) zu 5 Schill., alte	7,8	264	1,64530
Kronen (Crown) seit 1818 (gesetzmäßig)	8,277	266,4	1,56457
Französische			
Fünf-Frankenstücke	9,348	259,2	1,34788
Helvetische			
Vier-Frankenstücke zu 40 Batzen seit 1803	7,782	259,2	1,61912
Holländische			
Gulden-Stücke	22,217	262,5	0,57435
Schillinge zu 6 Stüber	$46\frac{7}{8}$	164,5	0,17059
Ducatons	7,17	270	1,83054
Neapolitanische			
Ducati von 10 Carlini und 100 Grani von 1784.	10,274	240	1,13555
Nordamerikanische			
Dollars oder Piaster	8,673	257	1,44045
Oesterreichische			
20-Kreutzer-Stücke	35	168	0,23333
Parmaische			
Ducati seit 1784	9,089	261	1,39591
Fünf-Lire-Stücke von Marie Louise seit 1818	9,348	259,2	1,34788
Päbstliche			
Scudi zu 10 Paoli oder 100 Bajocchi	8,73	261	1,45332
Testoni zu 3 Paoli oder 30 Bajocchi	29,76	264	0,43123
Papeti oder Lire zu 2 Paoli . .	44,18	264	0,29047
Portugiesische			
Cruſaden zu 480 Rees	16,296	261	0,77856
Russische			
Rubel von 1798	11,286	250	1,07680

Silber-Münzen.	Auf 1 rauhe preuß. Mrk. gehen Stück	Gehalt	Werth von 1 Stück in preuß. Courant
Rubel von Paul I seit 1797 . .	8	250	1,51910
Rubel seit 1762	9,75	216	1,07692
Rubel von 1731 bis 1762 . . .	9,052	231	1,24051
Rubel von 1718 bis 1731 . . .	8,228	210	1,24068
Rubel von 1704 bis 1718 . . .	8,293	248	1,45370
Sardinische			
Scudi zu $2\frac{1}{2}$ Lire	9,904	258	1,26632
Savoyische und Piemontesische			
Scudi zu 6 Lire seit 1755	6,643	261	1,90990
Schwedische			
Species-Thaler zu 48 Schill. seit 1777	7,988	253	1,53963
Alte Carolinen oder 2-Mark-Stücke	22,467	200	0,43273
Sicilianische			
Scudi zu 12 Tari	8,561	240	1,36277
Spanische			
Piaster, alte peruanische nach französischer Probe	8,73	261	1,45332
Piaster, peruanische von 1744 . .	8,713	260	1,45058
Piaster, mexikanische	8,73	260	1,44775
Piaster, eckige mexikanische . . .	8,835	262	1,44155
Piaster mit 2 Globen von 1748 .	8,644	260	1,46216
Piaster, neue seit 1772	$8\frac{3}{4}$	258	1,44712
Pesetas zu 4 Reales de Vellon .	$38\frac{1}{16}$	240	0,30651
Reales de Vellon	$152\frac{1}{4}$	240	0,07663
Venetianische			
Ducati zu 8 Lire piccol.	10,26	238	1,12763
Scudi della Croze zu $12\frac{2}{5}$ Lire piccol.	7,314	272	1,80780
Giustini zu 11 Lire piccol. . . .	8,36	266	1,54672
Taleri zu 10 Lire piccol.	8,681	251,5	1,40833

Ende.

Gedruckt bei A. W. Hayn.

Elementarbücher von S. F. Lacroix,

welche in demselben Verlage in deutscher Uebersetzung erschienen sind.

Anfangsgründe der Algebra; übersetzt von J. Ph. Gruson. gr. 8. 1821. 1 Thlr. 10 Sgr.

Derselben zweiter Theil, oder weitere Ausführung; übersetzt von E. M. Hahn. 8. 1805. 1 Thlr. 20 Sgr.

Anleitung zur ebenen und sphärischen Trigonometrie, und zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie; übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen von L. Ideler gr. 8. mit Kupf. 1822. 1 Thlr. 15 Sgr.

—— —— weitere Ausführung hiervon; oder: Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie, aufgelöset und bewiesen durch die algebraische Analysis. Von L. Puissant; übersetzt von E. M. Hahn. Mit Kupf. gr. 8. 1806. 20 Sgr.

Anfangsgründe der Geometrie. Nebst einer Abhandlung über die in diesen Anfangsgründen zu befolgende Ordnung, über die Art sie abzufassen, und über die Methode in den mathematischen Wissenschaften; übersetzt und mit Zusätzen begleitet von E. M. Hahn; mit 7 Kupf. gr. 8. 1806. 1 Thlr. 20 Sgr.

—— —— weitere Ausführung hiervon; oder: Versuch einer Geometrie über die ebenen und krummen Oberflächen, nebst Anfangsgründen der Perspektive, zum besondern Gebrauch für die ausübenden Meßkünstler; übers. von E. M. Hahn. Mit 10 Kupf. gr. 8. 1806. 1 Thlr. 5 Sgr

Von Meier Hirsch

ist ebendaselbst erschienen.

Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Dritte verbesserte Auflage. 8. 1816. 1 Thlr 10 Sgr.

Hierzu gehört:

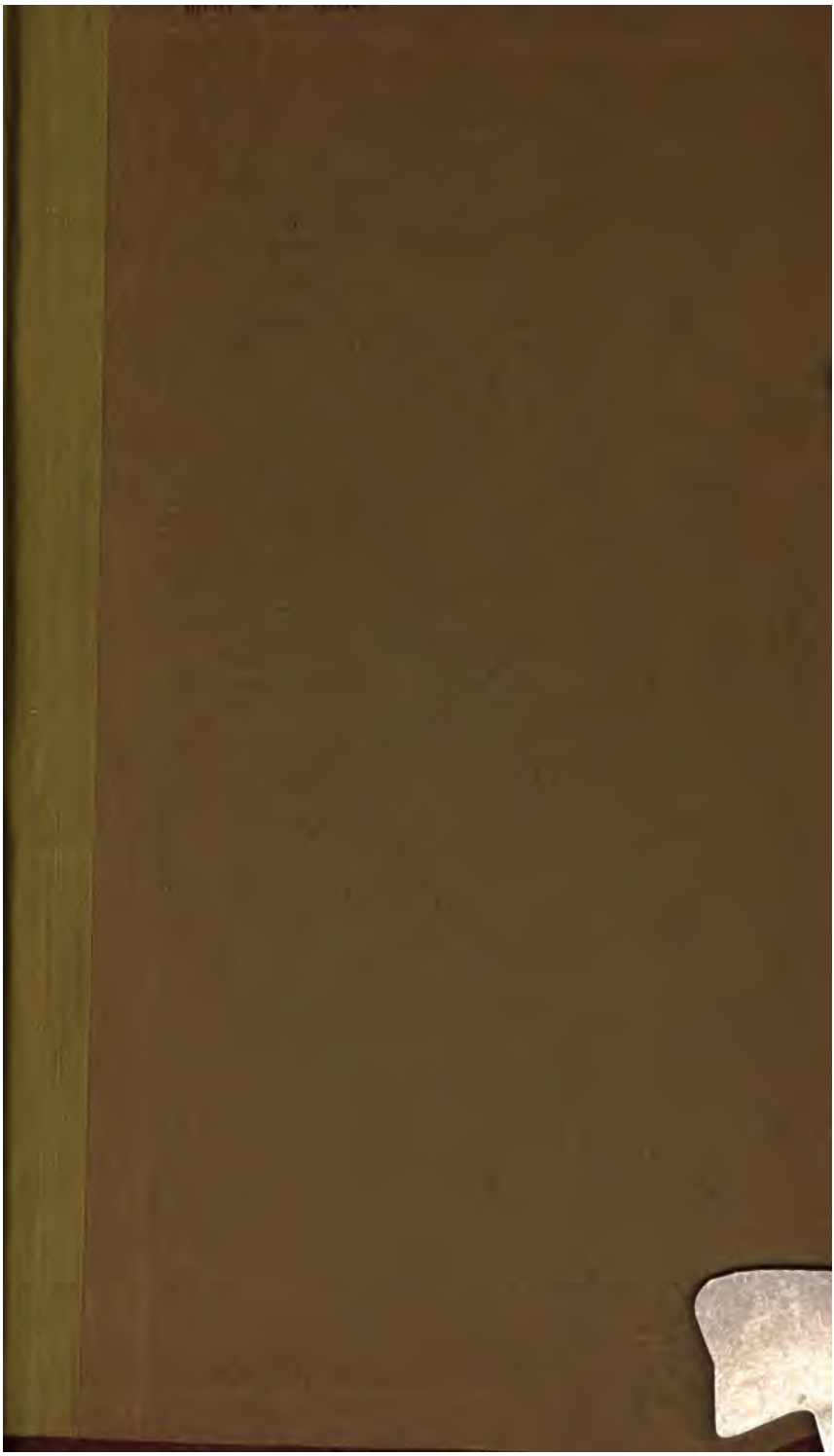
S. Sachs Auflösungen der in M. Hirsch's Sammlung von Beispielen ꝛc. enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. Dritte Auflage. 8. 1821. 1 Thlr. 20 Sgr.

P. N. C. Egen Handbuch der allgemeinen Arithmetik; besonders in Beziehung auf die „Sammlung von Beispielen ꝛc. von Meier Hirsch. 2 Bde. gr. 8. 1820. 4 Thlr.

Fortsetzung derselben; oder Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen 1r. Theil. 8. 1808. 1 Thlr. 20 Sgr.

Sammlung geometrischer Anfgaben. 2 Theile, mit 20 Kupfertafeln. 8. 1805. u. 1807. jeder 1 Thlr. 20 Sgr.

Integral-Tafeln, oder Sammlung von Integral-Formeln. gr. 4. 1810. 3 Thlr.



MAR 2 7 1935